第34回　解析接続

138

　このラッキー数学塾もゴールが近づきました。オイラーの無限解析から始まったのですが、

その内容は　$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots$　という無限級数の和を求めることでした。

　そして最後は、正則な関数 $f(z)$ をテイラー展開で無限級数に展開する話です。この無限級数には収束半径というものがあり、狭い範囲でしか使えません。ただ形を変えることで定義域を広げていき、平面全体で無限級数展開ができるという内容です。それを解析接続といいます。

例 1 $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$　　これはとても簡単な分数関数です。無限級数展開ができますが

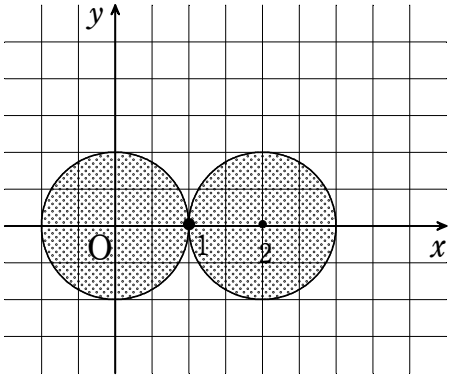
$$f(z)=\frac{-1}{1-z}=-(1+z+z^2+\cdots)\quad\cdots\quad①$$

$|z|<1$　で収束、特異点は $z=1$ です。

今度は、$z=2$ を中心として無限級数を考えると

$$f(z)=\frac{1}{1+z-2}=1-(z-2)+(z-2)^2+\cdots\quad\cdots\quad②$$

$|z-2|<1$　という円の内部で収束です。



右の図において、2つの円の内部の z の値のとき $f(z)$ は無限級数で表現されることになります。

ただ、これでは複素平面上の多くの部分で級数展開ができないことになってしまうわけです。

139

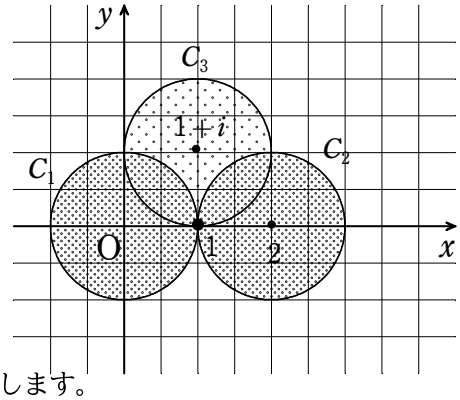
　x 軸上だけでは無限級数で表現できる範囲は限界がありますが、2次元の複素平面の点を中心とすればその範囲を広げられます。例えば、$z=1+i$ を中心とする無限級数を考えてみます。

例 1 $f(z)=\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{i+z-1-i}$

$$=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1-i}{i}}\qquad\text{と変形すれば}$$

$$=\frac{1}{i}\left\{1-\frac{z-1-i}{i}+\frac{(z-1-i)^2}{i^2}-\cdots\right\}\quad\cdots\quad③$$

$|z-1-i|<1$　で収束



　右の図において、中心が原点の円を C_1、中心が点 2 の円を C_2、中心が点 $1+i$ の円を C_3 とします。

C_1 と C_3 の共有部分には無限個の点がありますが、そこでは ① と ③ の 2 つの無限級数が関数 $y=\dfrac{1}{z-1}$ と一致するので、「一致の定理」より C_1 または C_3 の領域で無限級数展開できることになります。同様に C_2 と C_3 の共有部分に着目すれば「一致の定理」より C_2 または C_3 の領域で無限級数展開できることになります。このように広げていけば、複素平面全体で、特異点を除いて正則関数は級数展開できることになります。

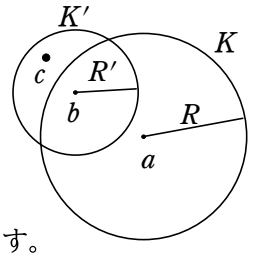
140

イメージとしては139のような感じで「一致の定理」から正則関数は複素平面全体で級数展開表示できる関数ととらえられます。関数論の教科書としては、もう少しきっちりとした説明があります。

そこで、関数要素や直接接続という言葉の定義をしていきます。

> $z=a$ を中心とする整級数
> $b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots$ があり、 収束半径 $R>0$ のとき、
> この整級数を a を中心とする関数要素といい、 $P(z;a)$ で表す。

$P(z;a)$ は $|z-a|<R$ で収束する正則関数です。



次は直接接続という話です。

整級数 $P(z;a)$ が K で定義されているとします。

その収束円内 K: $|z-a|<R$ の1点 b とし

$z=b$ の近傍でテーラー展開を

$P(z;a)=1+\dfrac{b_1}{1!}(z-b)+\dfrac{b_2}{2!}(z-b)^2+\cdots=P(z;b)$ とおきます。

$P(z;b)$ の収束半径 R' は $d=R-|b-a|$ 以上になります。

$K':|z-b|<R'$ （$R'\geqq d>0$）がその収束円で、 $P(z;b)$ を $P(z;a)$ の直接接続といいます。

$$F(z)=\begin{cases}P(z\ ;\ a) & (z\in K)\\ P(z\ ;\ b) & (z\in K')\end{cases}$$

とし、1つの整級数 $P(z;a)$ から広がった関数 $F(z)$ がつくられました。

$F(z)$ は領域 K から $K\cup K'$ の拡張領域で定義されます。今度はさらに K' 内の点 c をとり点 c の近傍でテーラー展開をし $P(z;b)=P(z;c)$ とおき、 $P(z;c)$ を $P(z;b)$ の直接接続となるように続けることができます。

141

ここで、解析接続と解析関数の定義を述べることにします。

> 「解析接続の定義」 領域 D で正則な関数 $f(z)$ に対し、 D を含むより広い領域 D' で正則な関数 $F(z)$ により $F(z)=f(z)\ in\ D$ のとき $F(z)$ を $f(z)$ の解析接続という。一致の定理よりそれは一意的である。
>
> 「解析関数の定義」 1つの関数要素 $P(z;a)$ から出発して、可能なあらゆる解析接続される関数要素の全体は1つの正則関数 $F(z)$ を定める。 $F(z)$ を $P(z;a)$ により定められた解析関数といいます。

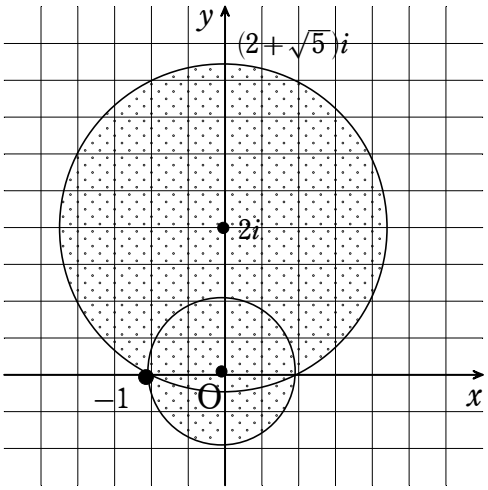
例 関数要素 $P_1(z\ ;\ 0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=1-z+z^2-z^3+\cdots=\dfrac{1}{1+z}$ $|z|<1$

を解析接続して、 $z=2i$ における関数要素を求める。

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1+2i+z-2i}=\frac{\dfrac{1}{1+2i}}{1+\dfrac{z-2i}{1+2i}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+2i}\left(-\frac{z-2i}{1+2i}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2i)^2}{(1+2i)^{n+1}}=P_2(z\,;\,2i)$$



$P_2(z\,;\,2i)$ が求める関数要素で
収束範囲は　$|z-2i|<\sqrt{5}$　となります。

具体的に記述すると

$P_2(z\,;\,2i)=\dfrac{1}{1+2i}-\dfrac{z-2i}{(1+2i)^2}+\dfrac{(z-2i)^2}{(1+2i)^3}-\cdots$　　となり、かなり複雑です。

ともかくこのように解析接続をして $F(z)=\dfrac{1}{1+z}$ は複素平面全体でテーラー展開できます。

142

まとめると、我々が一般に関数と呼ぶ、2次関数、3次関数、分数関数、無理関数、三角関数、指数･対数関数などは、特異点を除けば複素平面全体で正則な関数となっています。

正則関数の特徴として、正則の領域ではテーラー展開できること、有限または無限級数で表現できることがあります。ただし収束半径というものがあって、平面全体で一意的には定義できないけれど「一致の定理」を基礎として形を変化させ、平面全体に拡張できることを学びました。

また、複素変数 $z=x+iy$ としてまとまって変化するので、コーシー･リーマンの関係式という制約が付くことも重要だといえます。次は解析学について整理していきます。