第31回　留数

123

ローラン展開において、 $f(z)$ は1点 a を除いた領域において

$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$　　と級数に展開されます

ただし　$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$　　（ n は整数）でした。

また

$\int_C (z-a)^n dz=0$　は、$n\neq -1$ であればすべての整数で成り立ちます。

ただ、 $n=-1$ のときだけ0にならないのです。

$$\int_C \frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=\int_0^{2\pi} id\theta=2\pi i$$

したがって、 $f(z)$ が $z=a$ を極とするローラン展開されたとき、点 a を囲む閉曲線 C では

$$\int_C f(z)dz=\int_C\left\{\frac{b_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{b_{-1}}{z-a}+b_0+b_1(z-a)+\cdots\right\}dz=2\pi i\cdot b_{-1}$$

となります。

この b_{-1} の値を $z=a$ における $f(z)$ の留数と呼び　$R(a)$ と表します。

ですから　$\boxed{\int_C f(z)dz=2\pi i\, R(a)}$　が成り立ちます。

「留」という言葉は残り物という意味です。正則関数であれば、閉曲線で囲まれた場合の積分は 0 になるわけですが、孤立特異点が存在する場合何かが残るということでしょう。

1つ簡単な例として　$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\left\{1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)^3+\cdots\right\}$

$=z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{6z}+\cdots$　　より

$R(0)=\frac{1}{6}$　となります。

124

いろいろな関数の特異点における留数を具体的に求めていきます。

例1　$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)^2}$　の特異点 $z=1,-2$ における留数を求めます。

$f(z)$ は分数式ですから　$f(z)=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{z+2}+\frac{c}{(z+2)^2}$　とおいて

恒等式の係数比較法より　$a=\frac{1}{9}, b=-\frac{1}{9}, c=-\frac{1}{3}$ が求まり

$f(z)=\frac{1}{9(z-1)}-\frac{1}{9(z+2)}-\frac{1}{3(z+2)^2}$　となります。 $z=1$ における級数展開において

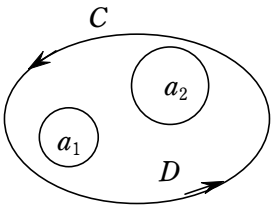
第2項と第3項は正則ですから $z=1$ の周りの積分は 0 になります。

$z=1$ における留数は　$R(1)=\frac{1}{9}$　　同様に $z=-2$ における留数は　$R(-2)=-\frac{1}{9}$　です。

ここで留数定理をまとめておきましょう。

留数定理　　単純閉曲線 C の内部を D
$f(z)$ は D 内の点 $a_1, \cdots, a_n$ で特異点
それ以外の D の点および C 上で正則のとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum_{j=1}^{n} R(a_j)$$



125

留数を計算する便利な方法があります。それを紹介しましょう。

（1）関数 $f(z)$ が1位の極のとき

$f(z)=\dfrac{b_{-1}}{z-a}+b_0+b_1(z-a)+\dfrac{b_2}{2!}(z-a)^2+\cdots$　　とおけます

$(z-a)f(z)=b_{-1}+b_0(z-a)+b_1(z-a)^2+\cdots$　　より　　$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=b_{-1}=R(a)$

(2) 関数 $f(z)$ が 2位 の極のとき

$f(z)=\dfrac{b_{-2}}{(z-a)^2}+\dfrac{b_{-1}}{z-a}+b_0+b_1(z-a)+\dfrac{b_2}{2!}(z-a)^2+\cdots$　　とおけます

$(z-a)^2f(z)=b_{-2}+b_{-1}(z-a)+b_0(z-a)^2+\cdots$　　ここで両辺を z で微分すると

$\dfrac{d}{dz}\{(z-a)^2f(z)\}=b_{-1}+2b_0(z-a)+\cdots$　　より　　$\lim\limits_{z\to a}\dfrac{d}{dz}\{(z-a)^2f(z)\}=b_{-1}=R(a)$

となります。

関数 $f(z)$ が 3位以上 の極のときも同様に考えればできます。

126

次はこの留数を使った、いろいろな関数の閉曲線における積分を考えます。

例1　$f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1}=\dfrac{1}{(z-\omega)(z-\omega^2)}$　を考えます。

ただし　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$　$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$　です。

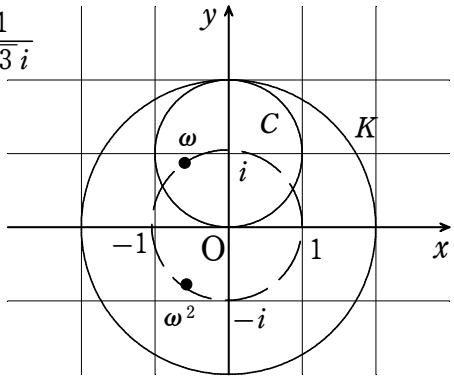
閉曲線として　$C:|z-i|=1$ と　$K:|z|=2$　を考えます。

$R(\omega)=\lim\limits_{z\to\omega}(z-\omega)f(z)=\lim\limits_{z\to\omega}\dfrac{1}{z-\omega^2}=\dfrac{1}{\omega-\omega^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\,i}$

$R(\omega^2)=\dfrac{1}{\omega^2-\omega}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}\,i}$　　より

$\displaystyle\int_C f(z)dz=2\pi i\,R(\omega)=\frac{2\pi i}{\sqrt{3}\,i}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

$\displaystyle\int_K f(z)dz=2\pi i\{R(\omega)+R(\omega^2)\}=0$　　となります。

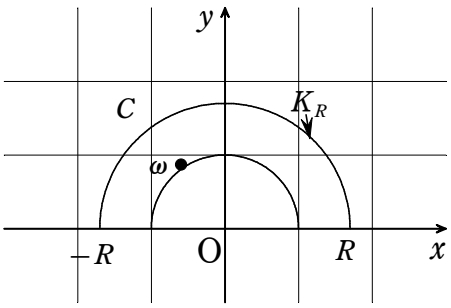


このような計算はあまりないかもしれませんね。

127

留数の計算の応用としては、積分区間が $-\infty$ から ∞ にわたる実数の積分に利用されます。

例２　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$　　を求めます。



中心が原点で半径 R の上半円を K_R
実軸上の線分〔$-R$, R〕と K_R で
囲まれた半円を C とします。
このとき

$$\int_C\frac{dz}{z^2+z+1}=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+x+1}+\int_{K_R}\frac{dz}{z^2+z+1}$$

が成り立ちますが

例1より　$\displaystyle\int_C\frac{dz}{z^2+z+1}=2\pi i\,R(\omega)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$　です。

ここで　$R\longrightarrow\infty$　のとき　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{K_R}\frac{dz}{z^2+z+1}$　が決まればうまくいきます。

いま、有効な補助定理があります。

> 補助定理　$z\longrightarrow\infty$　のとき　$z^2f(z)$ が有界　すなわち
> $\forall R>0\ \exists M>0$　$|z|>R$　のとき　$|z^2f(z)|\leqq M$　ならば
> $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{K_R}f(z)dz=0$　が成り立つ。

（証明）それほど難しくないので行います。

K_R は　$z=Re^{i\theta}$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$　より　$dz=iz\,d\theta$

$$\left|\int_{K_R}f(z)dz\right|\leqq\int_0^{\pi}|f(z)iz|d\theta\leqq\int_0^{\pi}\frac{M}{R}d\theta=\frac{M}{R}\pi\quad\therefore\quad\lim_{R\to\infty}\frac{M}{R}\pi=0$$

今の場合　$z^2f(z)=\dfrac{z^2}{z^2+z+1}$　なので　$\displaystyle\lim_{z\to\infty}z^2f(z)=1$　有界となり

補助定理から　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{K_R}\frac{dz}{z^2+z+1}=0$　が成立。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_C\frac{dz}{z^2+z+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$　と求まります。

128

初等関数論の教科書には次に「偏角の定理」や 16 のところで触れた「ルーシェの定理」などの話になりますが、この講座では省略します。必ず教科書には載っていると思います。

あともう少しで一区切りとなりますが、最後に「無限遠点」の話と「解析接続」に進みたいと思います。実数においては ∞ というのは 1 つの数ではなく、どんな大きな数も越えられる能力のようなものと理解しておりますが、複素平面とリーマン球を1対1に対応させることによって、無限大 ∞ という存在が考えられます。その点が実数とは異なる所ですね。