第32回　無限遠点

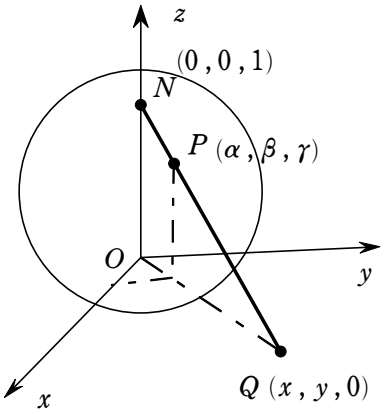
129

実変数にも無限大として $+\infty$ と $-\infty$ がありますが、これは極限においていかなる大きな数をも乗り越えるという能力のようなものだと説明しました。複素数にも $z=re^{i\theta}\longrightarrow\infty$ があり、$r\longrightarrow\infty$ を意味するが θ は任意と考えられています。しかし、リーマン球面というものを考えて、複素平面と1対1の点の対応を考えることによって「無限遠点 ∞」という存在が生まれます。

3次元空間における球面

$S:x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$　を考えます。

S上の北極 $N(0,0,1)$ と xy 平面上の
任意の点 $Q(x,y,0)$ を結ぶ直線は
球面上の点 $P(\alpha,\beta,\gamma)$ で交わります。
いま複素平面上の点 Q と1点 N を除いた
球面 S の点とは1対1に対応します。
北極 N に対応する複素平面上の仮想的な
1点を導入して無限遠点と名付けます。
そしてこの球面 S をリーマン球面といいます。



130

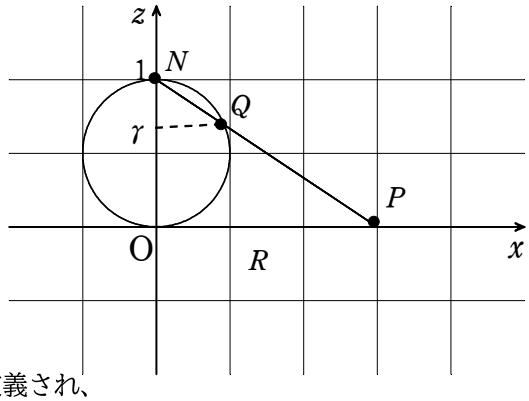
複素平面とリーマン球面を横から見た立面図を考えます。
OP の長さを R、点 Q の z 座標を γ とすると
方べきの定理より　$PQ\cdot PN=R^2$　です。

$PN=\sqrt{1+R^2}$ より　$PQ=\dfrac{R^2}{\sqrt{1+R^2}}$

三角形の相似比を使うと

$PQ:PN=\gamma:1$ より　$\gamma=\dfrac{PQ}{PN}=\dfrac{R^2}{1+R^2}$

となります。　$\lim\limits_{R\to\infty}\gamma=1$　ですね。



いま無限遠点 ∞ の近傍 $U(\infty)$ というものが定義され、
$U(\infty)=\{z\mid|z|>R\}$　です。$U(\infty)$ に対応するリーマン球上の集合は
北極 N の周りの極地です。複素関数を複素平面で考えるとき ∞ が含まれています。

例　数列　$\{a_n=n\}$ や $\{b_n=(-1)^{n-1}n\}$　は実数においては発散する数列でしたが、
複素数においては無限遠点 ∞ に収束すると考えます。

今まで　$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\alpha$（有限確定値）、$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$　、$\lim\limits_{z\to\alpha}f(z)=\infty$
と書いてきたものを、　$f(\infty)=\alpha$　、$f(\infty)=\infty$　、$f(a)=\infty$　という書き方をします。

131

関数 $f(z)$ は領域 $D:R<|z|<\infty$ において正則で、そのローラン展開が

$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{-n}}{z^n}$ とします。

$f(z)$ の $z=\infty$ において発散にかかわる主要部は、第1級数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$ です。

この主要部がないとき、つまり $f(z)=b_0+\frac{b_{-1}}{z}+\frac{b_{-2}}{z^2}+\cdots$ のとき、$z=\infty$ で正則です。

また、（主要部）$=b_1 z+b_2 z^2+\cdots+b_k z^k$（有限）のとき、$z=\infty$ は k 位の極、

（主要部）が無限級数のとき、$z=\infty$ は真性特異点といいます。

さらに $z=\infty$ で正則で、$f(z)=\frac{b_{-k}}{z^k}+\frac{b_{-k-1}}{z^{k+1}}+\cdots$ のとき、k 位の零点といいます。

例1　$f(z)=\frac{z^4}{z^2-z+2}$ を考えます。

$$f(z)=\frac{z^2}{1-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^2}}=z^2\left\{1+\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}\right)^2+\cdots\right\}=z^2+z-1-\frac{3}{z}+\cdots$$

$z=\infty$ は2位の極になります。

132

もう少し極や零点について、例を挙げて考えます。

例2　$f(z)=\frac{z}{z^2-z-2}$ は部分分数に分解すると　$f(z)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1}$　ですが

$z=0$ は1位の零点。$z=2$ と $z=-1$ はともに1位の極です。

$z=\infty$ の零点と極を考えるとき、$z=\frac{1}{\zeta}$ とおくと計算しやすいです。

$$f(z)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\zeta}-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\zeta}+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\zeta}{1-2\zeta}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\zeta}{1+\zeta}$$

$$=\frac{2\zeta}{3}(1+2\zeta+4\zeta^2+\cdots)+\frac{\zeta}{3}(1-\zeta+\zeta^2-\cdots)\qquad |2\zeta|<1\quad\therefore\quad|\zeta|<\frac{1}{2}\ \text{のとき収束}$$

$$=\zeta+\zeta^2+3\zeta^3+\cdots=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\cdots\qquad\therefore\quad|z|>2\quad\text{のとき収束}$$

よって　$z=\infty$ は1位の零点であることがわかります。

例3　$f(z)=\frac{z^2}{1-z}$　のとき　$z=0$ は2位の零点。$z=1$ は1位の極です。

$$f(z)=\frac{1}{\zeta^2\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)}=\frac{1}{\zeta(\zeta-1)}=-\frac{1}{\zeta}(1+\zeta+\zeta^2+\cdots)=-\frac{1}{\zeta}-1-\zeta-\cdots=-z-1-\frac{1}{z}-\cdots$$

より $z=\infty$ は1位の極であることがわかります。

次は無限遠点 ∞ における留数を定義することによって、すべての留数の和は 0 になるという定理を示していきます。