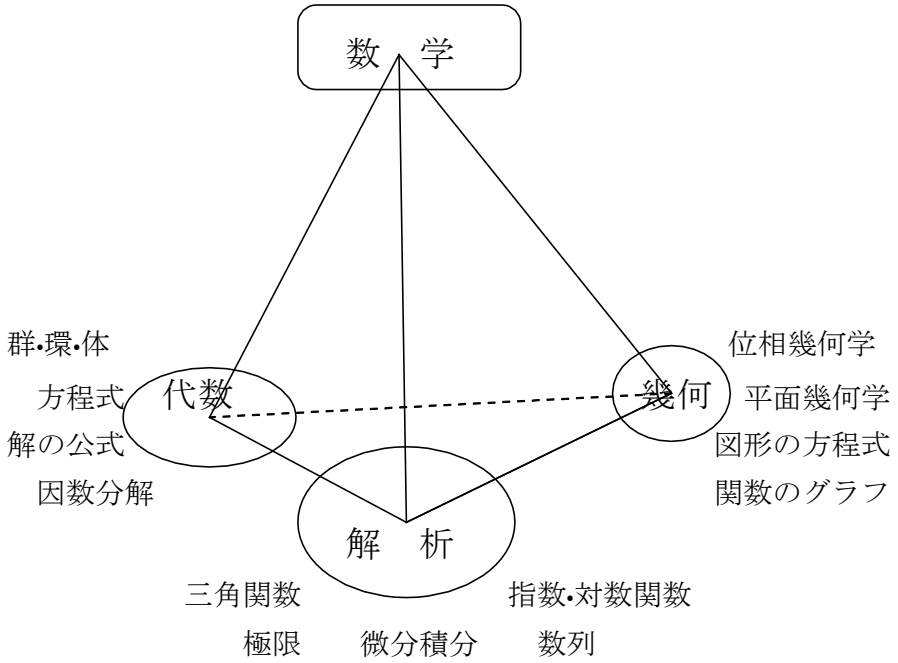
第35回　解析学とは

143

数学は大きく分類して（代数･幾何･解析）の 3 つになります。中・高では、この中で微分積分学を頂点とした解析学を学ぶことが数学教育の目標であったように思います。近代の自然科学の発展や工学などの進展では微分積分学の寄与が大きかったからです。

ただ、高等学校終了までの内容は実数における 1 変数の微分積分学にとどまっています。大学に入り、多変数になったり、複素変数に進化することにより難しさが格段に増しました。

また理論的には、数学という学問も「実数の連続」という公理（仮説）を出発点として成立していることを認識すべきです。宇宙の始まりを”ビッグバン”という 1 つの仮説を出発点として物理学が進化しているようにも思われます。”ビッグバン”以前にも何かがあったのかもしれませんが、人間の思考というものは、どこかを始まりと決めて考えるしかないのだと思います。



144

今まで学んだ中から、特に押さえておきたいことをまとまます。

「実数の完備性について」

数の演算として、加減乗除から様々な数が生まれますが、有理数全体 Q には、稠密性というものがあってどんな狭い区間にも有理数は存在しています。しかし、 $\sqrt{2}$ という数は Q には入りません。この $\sqrt{2}$ というものを無理数と呼び、有理数の極限として定義したわけです。「完備性」というのはこの極限値をも含む集合の性質です。

集合は数の集合が基本ですが、関数を1つ1つの元と考え、関数の集合を考えることができます。たとえば、〔a , b〕で連続な関数の集合などです。ところが高校の数学Ⅲの問題演習で出てきますが、極限関数は必ずしも連続にはならないということでした。この講座の 22 の例 2 で登場します。

数においては完備性を持った実数が考える基本であったのに対して、関数の集合においては連続という条件では完備性を持ちえません。連続より少し緩い条件で、関数の集合を考えることが必要です。そこで、ヒルベルト空間なるものが生まれました。

> $[a,b]$ において　$f(x)=g(x)$　とは　$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}^2 dx=0$　となること
> この積分はルベーグ積分であり　$f(x)=g(x)$　$(a.e.)$　$almost\ everywhere$ の略
> $[a,b]$ における零集合を除いて一致するとき $f(x)$ と $g(x)$ は同じと定めます

145

「正則関数と一致の定理」」

我々が普通関数と呼んでいるものとして、2次関数、分数関数、三角関数、対数関数などたくさんありますが、複素平面上で考えるとき、分母が 0 となる点を除いて正則です。微分可能と正則の違いは複素平面で考える場合に生まれます。ある点 P の周り 360° のどの方向から近づけても平均変化率の極限が一致する場合が正則です。微分可能性のように左右両方向から近づけるよりかなりハードルが高くなります。なので、ある点 P で正則という場合はその近傍で正則と考えます。

2 つの正則関数があった場合、狭い範囲の線分上の無限個の点からなる収束する点列で一致すれば、複素数平面全体で一致するということが起きてしまうのは驚くことです。ただ、正則関数が無限級数で表現されることを考えると、$f(z_n)=g(z_n)$　$n=1,2,\cdots$　ということが成り立ち、恒等的に $f(z)=g(z)$ となることが予想されます。２次関数は 3 点で一致すると同じになりますね。

一致の定理がすごいことなのか、正則関数の構造が固いのかは分かりませんが。

146

「無限遠点と留数の定理」

実数では関数というものは変数 x に対して $f(x)$ は一意的に定まるものでした。
しかし、複素数では、逆関数を考えるとき、$\sqrt{2z-3}$, $\log z$　などは多価性をもっています。実数と同じように 1 対 1 対応を考えるためにリーマン面が考えられました。そして複素平面と 1 対 1 の対応するものとしてリーマン球面がありました。そして、漠然と複素数 $z\to\infty$ となるものに対して、リーマン球面上の北極という 1 点を対応させることにより無限遠点 ∞ という存在が見えるようになったのです。136 にある「留数定理の拡張」という数学的にはすっきりした定理になりました。

長くお付き合いしていただきましたが、この「ラッキー数学塾」もここで一区切りです。

次は、代数の分野にチャレンジしたいと考えています。代数方程式は 5 次以上の場合解の公式がないという話です。ガロアの理論ですが、方程式を考える方法として群・環・体 という演算を持った集合を利用するものです。