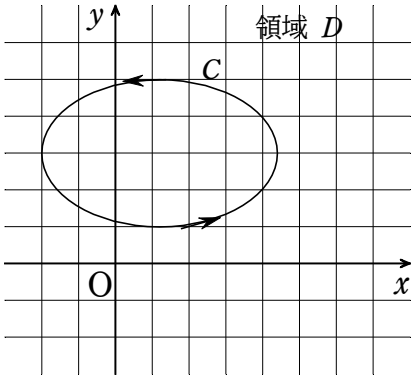
第33回　無限遠点における留数

133

今までの内容を復習しながら今回のタイトルに近づいていこうと思います。

まず、コーシーの積分定理からです。



$f(z)$ は単連結領域 D で正則、

C は D 内の単純閉曲線　とする

$\int_C f(z)dz=0$　　が成立します。

これは、 $f(z)$ が正則であるとき、テーラー展開できるので　$\int_C (z-a)^n dz=0 \quad (n\geqq 0)$ より導かれるものでした。

しかし 107 の系 2 より閉曲線 C の中に

2つの閉曲線 C_1, C_2 が含まれている場合

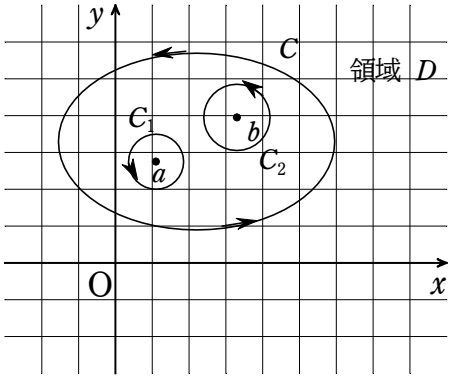
$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz \qquad (*)$$

となります。そして

右の図のように 2 点 a, b があり、

関数 $f(x)$ が 2 点 a, b で正則でない場合、

（＊）において留数が残ってしまいます。



$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz=2\pi i\, R(a)+2\pi i\, R(b)$　という結果になります。

134

無限遠点における留数を定義していきます。

> $z=\infty$ における留数 $R(\infty)$ は
> M は十分大きな正数で、 $f(z)$ は $M<|z|<\infty$ で正則のとき
> $-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=M'} f(z)dz=R(\infty)$　　が成立。ただし $M'>M$
> また $R(\infty)=-b_{-1}$ でもある。

$f(z)=\cdots+\frac{b_{-2}}{z^2}+\frac{b_{-1}}{z}+b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots$　　と級数展開できたとき

正則な級数　　$z=\infty$ における主要部　　とそれぞれ言います。

主要部がないとき、 $f(z)$ は $z=\infty$ で正則になります。

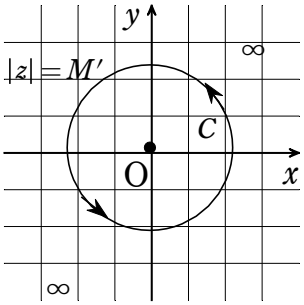
主要部が有限のときは極、無限のときは真性特異点となります。

一般に、点 a における留数 $R(a)=b_{-1}\neq 0$ ならば $f(z)$ は点 a で正則ではありませんが、点 ∞ においては $R(\infty)=b_{-1}\neq 0$ でも $f(z)$ は正則になりえます。なぜならば

$f(z)=\cdots+\dfrac{b_{-2}}{z^2}+\dfrac{b_{-1}}{z}+b_0$ のとき、点 ∞ において正則ですが、b_{-1} は任意です。

135

具体的に $z=\infty$ における留数を計算します。



例1　$f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}=\dfrac{1}{z^3}\left(1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^4}{4!}+\cdots\right)$

$=\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{z}{4!}+\cdots$

より　$R(\infty)=-\dfrac{1}{2}$

ここで留数にマイナスの記号が付くのは
曲線 C から ∞ を見たとき、進行方向の右側にあるからです。

例2　$g(z)=\dfrac{z^2}{z^3-z^2+3}$　　$z=\dfrac{1}{\zeta}$ とおくと

$=\dfrac{\zeta^3}{\zeta^2(1-\zeta+3\zeta^3)}=\dfrac{\zeta}{1-\zeta+3\zeta^3}=\zeta\{1+(\zeta-3\zeta^3)+\cdots\}$

$=\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\cdots=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^3}+\cdots$　　より　$R(\infty)=-1$

136

> 定理（留数定理の拡張）
> $f(z)$ は全平面　$|z|\leqq\infty$ において有限個を除いて正則のとき
> すべての留数の和は 0 になる。
> $z=a_j$ において正則でないとき
> $$\sum_{j=1}^{n}R(a_j)-\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum_{j=1}^{n}R(a_j)+R(\infty)=0$$

（証明）124における留数定理より　$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)dz=\sum_{j=1}^{n}R(a_j)$　①　が成立します。

また、134より　$-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)dz=R(\infty)$　②　となります。

①+②を考えれば　$0=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}R(a_j)+R(\infty)$　が導かれます。

この定理の意味するところはいろいろ考えられます。無限遠点を複素平面に組み入れることによって留数の総和が 0 になるので、$R(\infty)$ が求まれば正則ではない点における留数の和が求まり、閉曲線 C 上の積分が計算できるということです。確率における余事象の計算に似ています。

136で証明した留数定理の拡張を使った問題を考えてみます。

例1　$I=\int_{|z|=2}\frac{2z^2-1}{z^3-z^2+3}dz$

$f(z)=z^3$, $g(z)=-z^2+3$ とおきます。$|z|=2$ 上では　$|f(z)|=8$　$|g(z)|\leqq 4+3=7$

ここで第4回の16にあるルーシェの定理を使うと

$|z|<2$ における　$f(z)+g(z)$ と $f(z)$ の零点の個数は同じ3個になります。

いま零点となる場所を a_1, a_2, a_3 とすると

留数定理から　$I=2\pi i\{R(a_1)+R(a_2)+R(a_3)\}$　であり、また

留数定理に拡張から　$R(a_1)+R(a_2)+R(a_3)+R(\infty)=0$　なので　$I=-2\pi i\,R(\infty)$　となります。

$$\frac{2z^2-1}{z^3-z^2+3}=\frac{\zeta(2-\zeta^2)}{1-\zeta+3\zeta^3}=\zeta(2-\zeta^2)\{1+(\zeta-3\zeta^2)+\cdots\}\qquad(\zeta=\frac{1}{z})$$

$$=2\zeta+2\zeta^2+\cdots=\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}+\cdots\qquad\therefore\quad R(\infty)=-2$$

$I=\int_{|z|=2}\frac{2z^2-1}{z^3-z^2+3}dz=-2\pi i\,(-2)=4\pi i$　　という結果になります。

例2　$I=\int_{|z|=2}\frac{z}{z^4-1}dz=2\pi i\{R(1)+R(i)+R(-1)+R(-i)\}$　ですが

$I=-2\pi i\,R(\infty)$　で求めることができます。

$\frac{z}{z^4-1}=\frac{\zeta^4}{\zeta(1-\zeta^4)}=\zeta^3(1+\zeta^4+\zeta^8+\cdots)=\zeta^3+\zeta^7+\cdots=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^7}+\cdots$　より

$R(\infty)=0$　　よって　　$I=-2\pi i\times 0=0$　となります。

これらの計算を通して学ぶことは、複素関数の積分において留数という値が重要だということ。そして、無限遠点 ∞ を複素平面上の1部分であるという見方により、理論的に統一が取れて美しい結果が得られることだと思います。