第29回　リュービルの定理と一致の定理

113

まず、コーシーの積分定理の逆となるモレラの定理を述べます。

> モレラの定理
> $f(z)$ は領域 D で連続、　C は D 内の任意の閉曲線とする
> 常に　$\int_C f(z)dz=0$　　が成立ならば、 $f(z)$ は D で正則

この定理により、コーシーの積分定理を満たす関数は正則関数に限るということです。

114

次は、リュービルの定理です。

> リュービルの定理
> $f(z)$ は全平面 $|z|<\infty$ で正則かつ有界のとき
> $f(z)$ は定数である。

この定理の対偶は、定数ではない正則関数は有界ではなく、∞に発散する点があるとなります。
一般の整関数 $f(z)=az^n+\cdots$ などが $z=\infty$ で発散することはすぐわかります。
三角関数 $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ という定義なので、 z が純虚数をとれば有界でないことはわかります。

（リュービルの定理の証明）
仮定より、 $f(z)$ は全平面 $|z|<\infty$ で有界より　$\exists M>0$　$|f(z)|\leqq M$　とできます。
任意の点 z に対し、点 z を中心とし半径 R の円周 K とすると
$f'(z)$ の積分表示式から

$$|f'(z)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_K\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^2}|d\zeta|\leqq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^2}\int_K|d\zeta|=\frac{2\pi RM}{2\pi R^2}=\frac{M}{R}$$

R は任意より $R\to\infty$ とすると　$f'(z)\equiv 0$ となり、 $f(z)$ は定数である。

$f'(z)\equiv 0$ から $f(z)$ が定数であることを示したわけである。この定理を使って証明できるものとして代数学の基本定理があります。

115

n 次方程式は複素数の範囲では重複を含めて n 個の解をもつというう定理です。

> 代数学の基本定理
> n 次方程式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$
> $(n\geqq 1\,,\,a_0\neq 0)$ は必ず解をもつ。

（証明） $f(z)=0$ が解を持たないことを仮定して矛盾を導きます。

$f(z)$ は全平面で正則であり、0 とはならないので、$\frac{1}{f(z)}$ は全平面で正則です。

$|z|\to\infty$ のとき　$\frac{1}{f(z)}\to 0$ より　$\frac{1}{f(z)}$ は全平面で有界となります。

なぜならば　$\forall\varepsilon>0\ \ \exists R>0$　　$|z|>R$ のとき　$\frac{1}{f(z)}<\varepsilon$　であり

$|z|\leqq R$ では　$\frac{1}{f(z)}$ は最大値を持つので有界になります、よってリュービルの定理より

$\frac{1}{f(z)}$ は定数となり、$f(z)$ も定数なので矛盾します。

この定理は基本定理という名の通りとても重要であると思いますが、複素平面上に必ず n 個の解があるといっても、それがどこに存在するかわからなければ物足りません。例えば、駿河湾で昔金塊を積んだ船が沈没したことがわかってもそれだけでは探しようがありません。

それよりも、どんな高次のどんな方程式の解も、2次元平面の中にあるという点で、複素数という数の広さを感じます。確かに虚数の発見は価値がありました。

116

いよいよ一致の定理の証明を考えていきます。

> 一致の定理
> $f(z)$ は領域 D で正則。D 内の相異なる点からなる無限点列 $\{z_n\}$ が
> 開集合である D 内の点 z_0 に収束し、$f(z_n)=0$（nは整数）する。
> このとき　D において恒等的に　$f(z)\equiv 0$ が成り立つ。

（証明）$f(z)\equiv 0$ を否定して矛盾を導きます。
まず、$f(z)$ は連続ですから　$f(z_0)=\lim_{n\to\infty} f(z_n)=0$　となります。
z_0 は $f(z)$ の零点ですから　$f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$　　（k は正の整数）となり
$\varphi(z)$ は z_0 の近傍で正則であり　$\varphi(z_0)\neq 0$　…　①　とおけます。
任意の n について　$f(z_n)=(z_n-z_0)^k\varphi(z_n)$　ですが　左辺は常に 0 です。
右辺は条件より $z_n\neq z_0$　なので　$\varphi(z_n)=0$　です。$\varphi(z)$ は連続なので
$0=\lim_{n\to\infty}\varphi(z_n)=\varphi(z_0)$　これは ① に矛盾します。よって証明されました。

背理法の証明は何となくすっきりしませんが、論理は正しいです。
この定理の持つ意味は正則関数の性質を知るうえでとても大きいと思います。
領域 D において、2つの正則関数 $f(z), g(z)$ があったとします。D 内のある点 z_0 に収束する相異なる無限点列 $\{z_n\}$ があり、$f(z_n)=g(z_n)$ が成り立てば $f(z)$ と $g(z)$ は D 全体で一致する、つまり 1 つに定まるということです。

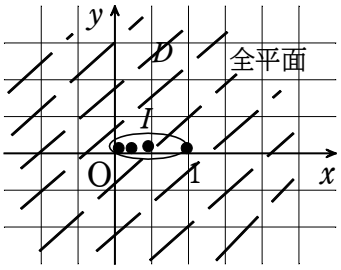
例として、$z_n=\frac{1}{n}$　とすると $z_n\to 0$ より　$z_0=0$ ですが、

$f(z_n)=f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}+1=\frac{1+n^2}{n^2}$　となる正則関数があったとします。

今、関数 $g(z)=z^2+1$ に対して　$\forall n$ について　$f(z_n)=g(z_n)$ なので、一致の定理より

全平面 D で $f(z)=g(z)$ が成立します。

つまり実軸上の $[0,1]$ という狭い区間 I において、関数 $f(z)$ のとる値が決まると、正則関数 $f(z)$ は全平面全体で規定されてしまうということです。



生物で例えてみると、1つの小さな細胞の中のＤＮＡを調べれば、その細胞を持つ生物を特定できるようなものです。とても不思議な感じがします。

117

正則関数の性質の最後、最大絶対値の原理に移っていきます。

> 最大絶対値の原理
> $f(z)$ は領域 D で正則かつ定数ではないとき、$|f(z)|$ は開集合 D で最大値をとらない。
> また、D が有界で、閉曲線 C で囲まれており、$f(z)$ が　$\overline{D}=D\cup C$ で連続のとき、
> $|f(z)|$ は境界 C で最大値をとる。

一般に連続関数は閉集合において最大値と最小値をとりますが、正則関数 $f(z)$ の絶対値関数 $|f(z)|$ は境界 C でとるということが特徴になります。証明はそれほど難しくはないですが、省略します。複素関数論のテキストには載っていると思います。

この定理の対偶は $f(z)$ が領域 D で正則なとき、開集合 D のどこかで $|f(z)|$ が最大値をとれば、$|f(z)|$ は定数となるということです。

同様に系として、最小の場合もあります。

> $f(z)$ は領域 D で正則で０にはならず、かつ定数ではないとき、
> $|f(z)|$ は開集合 D で最小値をとらない。
> D が有界で、閉曲線 C で囲まれており、$f(z)$ が　$\overline{D}=D\cup C$ で連続のとき、
> $|f(z)|$ は境界 C で最小値をとる。

次は分数関数 $y=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ のように、分母が０となる特異点を含む関数の展開式ローラン展開に入っていきます。