第28回　コーシーの積分表示とテーラー展開

108

関数 $f(z)$ が領域 D で正則ならば、 D 内の任意の点 a に対して整級数に一意的に展開できるというのがテイラー展開です。このことは実関数においても同様なことが成り立っていました。

初等関数論の教科書は、コーシーの積分定理からコーシーの積分表示に進み、テイラー展開の内容になっています。この講座では証明を追うのではなく、定理の内容をわかりやすく説明したいと思います。まず、コーシーの積分表示です。

> コーシーの積分表示式
> 単純閉曲線 C で囲まれた領域を D 、 $f(z)$ が $\overline{D}=D\cup C$ で正則のとき
> $\forall z_0\in D$ に対して　　$f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$　　が成立

いきなり $2\pi i$ が出てきたり、分母に $z-z_0$ のついた式が出てきたりと戸惑いますね。
さらに次の形式に拡張されます。

> 定理（正則関数の無限回微分可能性）
> コーシーの積分表示と同じ条件の下で $f(z)$ は何回でも微分可能で、
> $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$　　$(n=0,1,2,\cdots)$

複素関数 $f(z)$ が D で正則であれば何回でも微分可能ということは正則関数の大きな特徴です。
正則関数の特徴については、後でまとめたいと思います。

109

正則関数の無限回微分可能性について少し考えてみましょう。
n に関する命題なので、数学的帰納法で証明することになります。
$n=0$ の場合はコーシーの積分表示式でした。

$n=1$ のときを考えます。 $\forall z_0\in D$ に対して　$f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$　成立します。

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi ih}\int_C f(z)\left(\frac{1}{z-z_0-h}-\frac{1}{z-z_0}\right)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz$$

となりますが、 $h\longrightarrow 0$ のとき、(左辺)$\longrightarrow f'(z_0)$　は定義です。

（右辺）において、被積分関数の C 上の一様収束性から、 $\lim\limits_{h\to 0}$ と $\displaystyle\int_C$ は交換可能となり

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \lim_{h\to 0}\frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$　　となります。

$f'(z)$ は求められるので正則であり、計算は大変なようですが $n=2,3,\cdots$ と帰納的に求められ、何回でも微分可能となります。

110

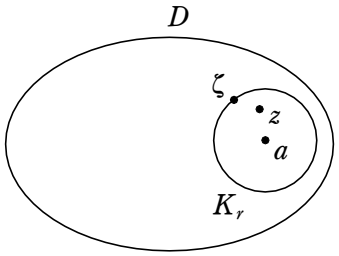
いよいよテーラー展開の話です。

> 定理（テーラー展開）
> $f(z)$ は領域 D で正則、 $a\in D$ のとき
> $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$　　ただし　$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$
> この a における整級数展開は一通りに限る。

少し補足をしておくと、 K_r は a を中心とした半径 r の円で、領域 D に含まれています。

（証明）コーシーの積分表示式において、 z_0 を z 、変数 z を ζ に置き換えると

$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$　　(1)　となります。



$|z-a|<r$ となる z をとると　$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$　(1) に代入すると

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right\}(z-a)^n$$

計算はとても大変ですが、大体このような流れで級数展開となります。

111

テーラー展開を用いてコーシーの積分表示を考えるととてもシンプルになります。

$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots$　とテーラー展開すると

$\frac{f(z)}{z-z_0}=\frac{f(z_0)}{z-z_0}+\frac{f'(z_0)}{1!}+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)+\cdots$　となります。曲線 C 上で積分すると

105　の結果より　$\int_C(z-a)^n dz=0$　$(n\neq -1)$　　$\int_C\frac{dz}{z-a}=2\pi i$　なので

$\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_C\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz=2\pi i\, f(z_0)$　　$\therefore$　$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$　となります。

また同様に

$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}}+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{(z-z_0)n!}+\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}+\cdots$　　なので

$\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\int_C\frac{f^{(n)}(z_0)}{(z-z_0)n!}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot 2\pi i$　$\therefore$　$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

$f(z)$ のテーラー展開を意識することでこれらの公式は納得できます。

ここで正則関数の特徴をまとめてみたいと思います。

(1) 関数 $f(z)$ が正則である必要十分条件はコーシー･リーマンの関係式でした。

$f(z)$ 実部と虚部の関数 u と v は連続な偏導関数を持つとき

$f(z)$ が D で正則 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ということです。

$f'(z)=f_x(z)=\dfrac{1}{i}f_y(z)$ もっと簡単に $\dfrac{d}{dz}=\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}$ とも表せます。

(2) 一般に初等関数と呼ばれるもの、整関数、分数関数、三角関数、指数･対数関数などは分母を 0 にするような特別の点を除いて正則ですが、 x, y が $z=x+iy$ の形でまとまっていなければならないことが分かっています。

(逆に正則関数ではない例)

$f(z)=(5x+2y)+i(5y-2x)=(5-2i)(x+iy)$ は正則ですが

$g(z)=(5x+2y)+i(4y-3x)$ とすると $\dfrac{\partial u}{\partial x}=5$ $\dfrac{\partial v}{\partial y}=4$ なので正則ではありません。

また、 $h(z)=\overline{z}=x-iy$ という簡単な関数も $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$ $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$ なので正則ではありません。

正則関数は $z=x+iy$ の形でまとまって変化しなければならないので大きな制約があります。

(3) ある領域で正則となる関数はテーラー展開できるわけですが、級数には収束半径があるので発散する特異点がある場合は注意が必要です。

(例) $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ は $f(z)=1+z+z^2+\cdots$

とテイラー展開できますが、収束半径は $r=1$

$f(z)=\dfrac{-1}{1+(z-2)}=-\{1-(z-2)+(z-2)^2+\cdots\}$

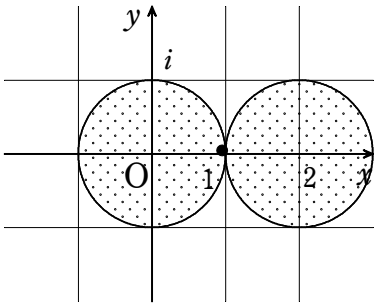
このとき収束するのは $|z-2|<1$ なので

点 2 を中心とし、半径 1 の円の内部になります。

領域を点で表しました。この図を見てわかるのは

$f(z)$ は $z=1$ 以外では正則なのにテーラー展開が

見つかっていない領域がたくさんあります。この内容は解析接続というところに出てきます。



次は、正則関数で成り立つ、モレラの定理、リュービルの定理、一致の定理、最大絶対値の原理という内容に入っていきます。