第26回　コーシーの積分定理

100

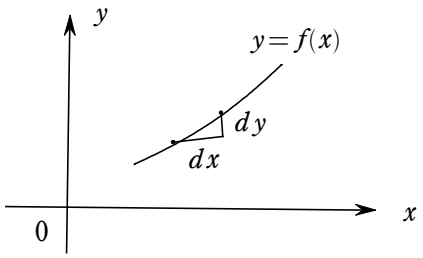
正則関数の性質を調べていくための出発点はコーシーの積分定理ですが、その前に少し準備が必要です。コーシーが学生のために書いた「微分積分学要論」（共立出版）という本がありますが、そこから始めようと思います。

任意の関数 $y=f(x)$ の導関数は　$y'=f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ と表現しますが、

関数の微分は　$dy=f'(x)dx$ と表現されます。
このような書き方は高校ではあまり出てきません。
コーシーの本には

$d(ax+b)=adx$　　$dx^n=nx^{n-1}dx$

$d\sin x=\cos x\,dx$　　$d\log x=\dfrac{1}{x}dx$



などが出てきます。関数のわずかな変化 dy は　変量 x の変化 dx に対して
x に依存する値 $f'(x)$ を掛けたものになるということです。

101

微分の公式なども出てきます。

u,v,w が x の関数のとき

(1)　$s=u+v+w$　ならば　$ds=du+dv+dw$

(2)　$s=uvw$　ならば　$\log s=\log u+\log v+\log w$　より

$d\log s=\dfrac{ds}{s}=\dfrac{du}{u}+\dfrac{dv}{v}+\dfrac{dw}{w}$　　$ds=s\left(\dfrac{du}{u}+\dfrac{dv}{v}+\dfrac{dw}{w}\right)$

$d(uvw)=du\cdot v\cdot w+u\cdot dv\cdot w+u\cdot v\cdot dw$　　と表されます。

(3)　$s=u+iv$　（複素関数の場合）　ならば　$ds=du+idv$　となります。

$s=\cos x+i\sin x$　のとき　つまり　$s=e^{ix}$　のとき

$ds=-\sin x\cdot dx+i\cos x\cdot dx=i(\cos x+i\sin x)dx$　となるので

$ds=isdx$　つまり　　$de^{ix}=ie^{ix}dx$　が成立します。

このように、高校から大学に進んだとき、微分の形式に戸惑うような感じがします。

102

正則関数を学ぶにあたって最も基本となる、コーシーの積分定理を挙げます。

> コーシーの積分定理
> $f(z)$ は単連結領域 D で正則、　C は D 内の単純閉曲線　とする
> $\displaystyle\int_C f(z)dz=0$　　が成立する

この定理の証明はいくつかありますが、グリーンの定理を用いた方法をとります。
複素積分になれることとコーシー･リーマンの関係式を使って簡潔に証明できる利点があります。

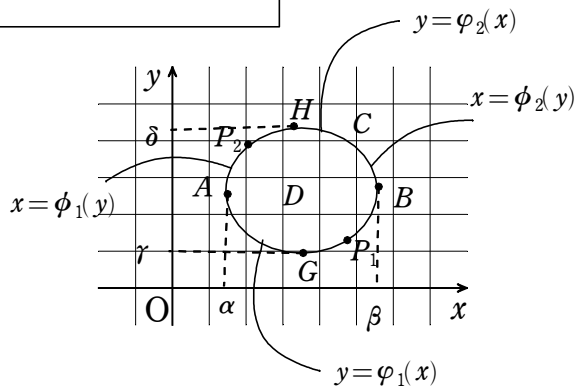
103

グリーンの定理

単純閉曲線　C　で囲まれた領域 D で

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ が $C\cup D$ で連続な偏導関数を持つとき

$$\int_C (Pdx+Qdy)=\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy$$　　が成立する



（証明）

左辺の積分を2つに分けて計算します。

$$\int_C Pdx=\int_{AP_1B} Pdx+\int_{BP_2A} Pdx$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P(x,\varphi_1(x))-P(x,\varphi_2(x))\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \frac{\partial}{\partial y}Pdydx=-\int_\alpha^\beta\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$=-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$\int_C Qdy=\int_{GP_1H} Qdy+\int_{HP_2G} Qdy=\int_\gamma^\delta \{Q(\phi_2(y),y)-Q(\phi_1(y),y)\}dy$$

$$=\int_\gamma^\delta\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \frac{\partial}{\partial x}Qdxdy=\int_\gamma^\delta\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$$

これらの2つの結果をまとめると

$$\int_C (Pdx+Qdy)=\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy$$　　となります。

104

いよいよコーシーの積分定理です。

（証明）　$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u+iv$　は曲線 C 上で連続

$z=x+iy$　より　$dz=dx+idy$　となります。

$$\int_C f(z)dz=\int_C (u+iv)(dx+idy)=\int_C (udx-vdy)+i\int_C (udy+vdx)$$

$$=\int_C \{(u+iv)dx+(-v+iu)dy\}$$　　ここでグリーンの定理を適用すると

$$=\iint_D \{(-u_y-iv_y)+(-v_x+iu_x)\}dxdy$$

よって　　$\int_C f(z)dz=i\iint_D \{(u_x-v_y)+i(u_y+v_x)\}dxdy$　　となりますが

$f(z)$ が領域 D で正則であればコーシー･リーマンの関係式を満たすので

$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ となり　　$\int_C f(z)dz=0$　　が成立します。

次はこの定理をさらに発展させていきます。