第27回　コーシーの積分定理（２）

105

コーシーの積分定理を発展させる前にいくつかの寄り道をします。

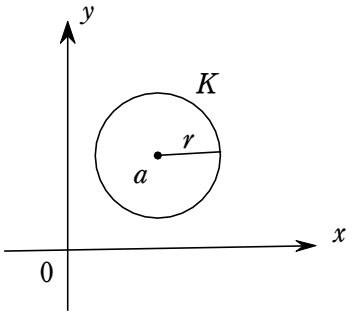
例　点 a を中心、半径 r の円 K を $K: z=a+re^{i\theta}\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$　とします。

$\int_K (z-a)^n dz$　の値を求めます。 n が 0 以上の整数ならばコーシーの積分定理より $(z-a)^n$ は K と K の内部で正則なので当然 0 になります。まずそれを確認しましょう。

$$\int_K (z-a)^n dz=\int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} ire^{i\theta} d\theta \qquad dz=ire^{i\theta}d\theta \quad （但し\ e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\ です。）$$

$$=ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{(n+1)\theta i}d\theta = ir^{n+1}\int_0^{2\pi}\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\}d\theta$$

$$=ir^{n+1}\left[-\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1}+i\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}\right]_0^{2\pi}=0$$



この計算は $n\neq -1$ であればすべての整数で成り立ちます。
ただ、 $n=-1$ のときだけ 0 にならないのです。

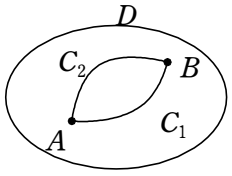
$$\int_K \frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=\int_0^{2\pi} id\theta=2\pi i$$

後で出てきますが、正則関数はべき級数展開できるので $\int_K (z-a)^n dz=0$ からコーシーの定理が成立するのは納得できます。ただ分数関数のように分母が 0 となる点がある場合、積分の範囲(Kの内部)に特異点と呼ばれる点がある場合は注意が必要です。

106

コーシーの積分定理の系として次の2つがあります。

系1　$f(z)$ は単連結領域 D で正則、
点 A から点 B までの曲線を C_1, C_2
C_1, C_2 は D 内の曲線とすると
$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz$　　が成立する



（証明）曲線の和　$C_1+C_2{}^{-1}$ が閉曲線になるので　$\int_{C_1+C_2{}^{-1}} f(z)dz=0$　が成立します。

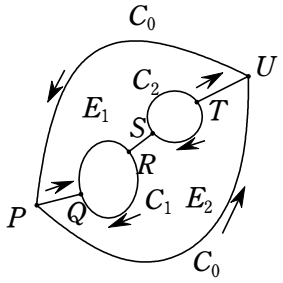
（左辺）$=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2{}^{-1}} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz-\int_{C_2} f(z)dz=0=$(右辺)　.

よって　$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz$　が成立。

この系1により $f(z)$ が D で正則であれば　$\int_A^B f(z)dz$ の値は経路によらず定まります。

系2　単連結領域 D、C_0 は D 内の曲線、
C_1, C_2 は C_0 内にあるとする
$f(z)$ は C_0 と C_1, C_2 ではさまれた領域で正則のとき

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$



（証明）大きな領域の曲線 C_0 の中にある小さな領域の曲線 C_1, C_2 を線分 PQ, RS, TU で結び、上の領域 E_1 と下の領域 E_2 に分けます。$f(z)$ は E_1 と E_2 で正則なので、

$$\int_{E_1} f(z)dz = \int_P^Q + \int_Q^R + \int_R^S + \int_S^T + \int_T^U + \int_{UC_0P} = 0 \qquad ①$$

$$\int_{E_2} f(z)dz = \int_U^T + \int_T^S + \int_S^R + \int_R^Q + \int_Q^P + \int_{PC_0U} = 0 \qquad ②$$

が成立します。

①と②を加えた場合　$\int_P^Q + \int_Q^P = 0$　などに注意すると

$$0 = \int_Q^R + \int_R^Q + \int_S^T + \int_T^S + \int_{UC_0P} + \int_{PC_0U} = -\int_{C_1} - \int_{C_2} + \int_{C_0}$$

（右回りの積分はマイナスです）

よって　$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$　が成立します。

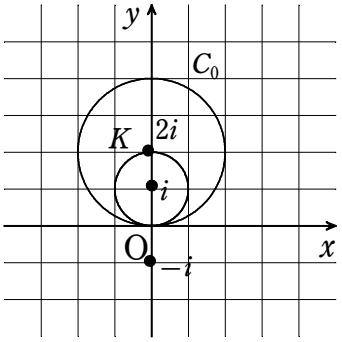
107

系 2 の内容を実用的に解釈することができます。それは、大きな閉曲線 C_0 を 1 周する積分は C_0 の中にある小さな円周を 1 周する積分に置き換えることができるということです。

例　$C_0 : |z-2i| = 2$　とします。積分　$I = \int_{C_0} \frac{1}{z^2+1} dz$　を求めてみます。

$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$　と変形できるので

$I = \int_{C_0} \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i}\int_{C_0}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz$　です。



$K : z = i + e^{i\theta}$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$　を考えると

$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ は C_0 と K で挟まれた部分で正則なので

系 2 により $I = \frac{1}{2i}\left(\int_K \frac{1}{z-i} dz - \int_K \frac{1}{z+i} dz\right)$　となり

105より　$\int_K \frac{1}{z-i} dz = 2\pi i$　という結果は分かっています。

$\frac{1}{z+i}$　は K の内部において正則より　$\int_K \frac{1}{z+1} dz = 0$　です。

したがって　$I = \frac{1}{2i}(2\pi i - 0) = \pi$　という答えを導きました。

この次は、正則関数 $f(z)$ は収束円内でテイラー展開できるという内容に進みます。