第30回　有理型関数のローラン展開

118

テーラーの展開式をつくるとき、その中心とする点 a は関数 $f(z)$ の正則な点でなければなりませんでした。これからは、点 a が関数 $f(z)$ の不正則な点であっても成り立つ展開式（ローラン展開）を考えていきます。

例1 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ の不正則な点は $z=-1$ と $z=2$ ですが、中心 $a=-1$ とします。

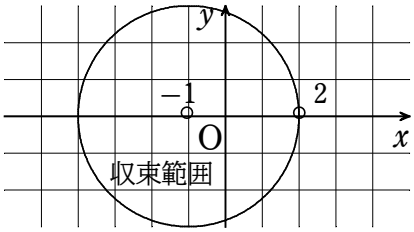
$f(z)=-\dfrac{1}{3(z+1)}+\dfrac{1}{3(z-2)}$ と部分分数に分けます。

第1項はそのままにして、第 2 項は中心 $a=-1$ とする展開式を作ると

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z+1-3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\dfrac{z+1}{3}-1}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+1}{3}}$$ と変形

$$=-\frac{1}{3}\left\{1+\frac{z+1}{3}+\frac{(z+1)^2}{3^2}+\cdots\right\}$$

収束範囲は $\left|\dfrac{z+1}{3}\right|<1$ です。



$$f(z)=-\frac{1}{3(z+1)}-\frac{1}{9}\left\{1+\frac{z+1}{3}+\frac{(z+1)^2}{3^2}+\cdots\right\}$$

$$=-\frac{1}{3(z+1)}-\frac{1}{3^2}-\frac{z+1}{3^3}-\frac{(z+1)^2}{3^4}-\cdots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{3^{n+1}}$$

$z=-1$ では定義できないので収束範囲は $0<|z+1|<3$ となります。

119

例2　$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ という関数を考えます。$z=0$ が不正則な点より、中心 $a=0$ として展開式を考えると、マクローリン展開から

$$f(z)=1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)^3+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$$ という形になります。

収束範囲は $(z\neq 0)$ です。

一般に関数 $f(z)$ が点 $z=a$ において不正則で、その近傍 $D:0<|z-a|<R$ においては正則のとき、a を $f(z)$ の孤立特異点といいます。そして点 a を中心とした展開式を作ったとき

負のべき級数が有限個の場合を 極 といいます。例1は1位の極です。
負のべき級数が無限の場合を 真性特異点 といいます。例2がそれにあたります。

次は、ローラン展開の定義に入ります。

定理（ローラン展開）

$f(z)$ は領域 D で1点 a を除いて正則でかつ点 a を中心とする円 C は D 内にあるとします。このとき、$f(z)$ は1点 a を除いた領域において次の級数に展開されます

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

ただし　$b_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$　　（ n は整数）

（証明）

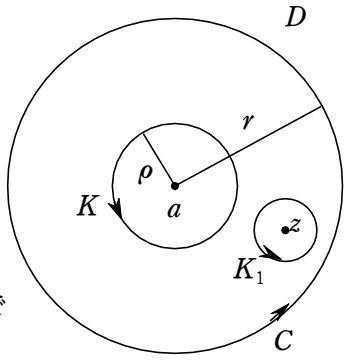
$f(z)$ は点 a を除いて正則

点 a を中心　半径 r の円 C

点 a を中心　半径 ρ の円 K

$0<\rho<|z-a|<r$　とし

円 K_1 は点 z を中心とし、C と K の間の円環内にある円とします。



106　系2　より　$\displaystyle\int_C d\zeta=\int_K d\zeta+\int_{K_1} d\zeta$　が成り立つので

$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$　が成立。　$B_1=A-B$　とおきます。

B_1 はコーシーの積分表示より　$f(z)$ に等しくなります。

A について　曲線 C は閉集合より　$\forall\zeta\in C$　$\exists M>0$　$|f(\zeta)|\leqq M$　①　となります

また　C 上は　$|z-a|<|\zeta-a|$ より　$\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$　②　なので

$\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{\zeta-a}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=\dfrac{1}{\zeta-a}\left\{1+\dfrac{z-a}{\zeta-a}+\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^2+\cdots\right\}$　が成立します

$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}$ は、①と②より C 上で一様収束なので $\int$ と $\sum$ が交換可能となり

A の積分は　$A=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-a)^k$　です。

B について　曲線 K は閉集合より　$\forall\zeta\in K$　$\exists N>0$　$|f(\zeta)|\leqq N$　③　となります

また　K 上は　$|z-a|>|\zeta-a|$ より　$\left|\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right|<1$　④　なので

$-\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{z-a}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=\dfrac{1}{z-a}\left\{1+\dfrac{\zeta-a}{z-a}+\left(\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)^2+\cdots\right\}$　が成立します。

$-\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^k f(\zeta)}{(z-a)^{k+1}}$ は、③と④より K 上で一様収束なので $\int$ と $\sum$ が交換可能となり

$-B$ の積分は　$-B=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^{-k-1}}{2\pi i}\int_K\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-k}}d\zeta$

$=\displaystyle\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta\cdot(z-a)^k=\sum_{k=-1}^{-\infty}b_k(z-a)^k$　　です。

ここで、106　の系 2 より積分経路の C と K を置き換えることができます。

よって　$b_k=\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta$　　であり　　$B_1=A-B$　より

$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k+\sum_{k=-1}^{-\infty} b_k(z-a)^k=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$　　が成立します。

121

ローラン展開の証明はなかなか複雑なものでした。

ポイントは　$\int_C d\zeta=\int_K d\zeta+\int_{K_1} d\zeta$　と　$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)$　ですね。

また、$\int_C d\zeta$　から　$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$　が、$-\int_{K_1} d\zeta$　から　$\sum_{n=-1}^{-\infty} b_n(z-a)^n$

の展開式が生まれことが重要です。

そして、積分 $\int d\zeta$　と　級数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ の交換が行われますが、関数項級数のワイエルシュトラスの定理から一様収束することになり、証明が完結します。

122

関数のローラン展開は実際には　118、119　のように既知の級数展開を利用するのがよいと思われます。いくつか例を挙げます。

例1　$f(z)=\frac{e^z}{z-1}$　を　$z=1$　で展開する。$z-1=w$　とおくと

$f(z)=\frac{e^{w+1}}{w}=\frac{e}{w}\left(1+\frac{w}{1!}+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\cdots\right)=e\left\{\frac{1}{z-1}+1+\frac{z-1}{2!}+\frac{(z-1)^2}{3!}+\cdots\right\}$

例2　$f(z)=\frac{4}{z(z-2)^2}$　を　$z=2$　で展開する。

$f(z)=\frac{2}{(z-2)^2}-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z}$　と部分分数に分解できます。

ここで　$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{z-2}{2}+\frac{(z-2)^2}{4}-\frac{(z-2)^3}{8}+\cdots\right\}$　より

$f(z)=\frac{2}{(z-2)^2}-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2}-\frac{z-2}{4}+\frac{(z-2)^2}{8}-\frac{(z-2)^3}{16}+\cdots$　と計算できます。

例えば微分の計算のときも同じですが、定義通りにすることは少なく公式を用いて実施することのほうが多いですね。