第２回　オイラーの無限解析その２

4

$P(x)=\dfrac{\sin x}{x}$　の展開式における x^2 の係数比較でバーゼルの問題は解けましたが、そのほかにも $x^4, x^6, \cdots\cdots$ の係数比較からもいろいろな結果が出てきます。

そこで、バーゼルの問題の拡張を考えます。

$S_k=1+\dfrac{1}{2^{2k}}+\dfrac{1}{3^{2k}}+\cdots+\dfrac{1}{n^{2k}}+\cdots$　とおくと、

$S_1=\dfrac{\pi^2}{6}$ となりこれがバーゼルの問題の解でありました。x^4 の係数を比較すると、

$\dfrac{1}{5!}=\dfrac{1}{\pi^4}\left(\dfrac{1}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{1^2\cdot 3^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^2\cdot 3^2}+\dfrac{1}{2^2\cdot 4^2}+\cdots\right)=\dfrac{1}{\pi^4}C$　とおいてみます

$C=\dfrac{\pi^4}{120}$　となります。

ここで、多少強引ですが　$\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots\right)^2=\left(\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots\right)+2C$　と考えれば

$S_1{}^2=S_2+2C$　　よって　$S_2=S_1{}^2-2C=\left(\dfrac{\pi^2}{6}\right)^2-2\cdot\dfrac{\pi^4}{120}=\dfrac{\pi^4}{90}$

$S_2=\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}+\cdots+\dfrac{1}{n^4}+\cdots=\dfrac{\pi^4}{90}$

参考までに　　$S_3=1+\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{1}{3^6}+\cdots+\dfrac{1}{n^6}+\cdots=\dfrac{\pi^6}{945}$　　なども求められます。

5

$\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\dfrac{x^6}{7!}+\cdots$　この式を使って問題を解きましたが、$\cos x$ の展開式

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots$　③　　を使うとどうなるでしょうか？

前回と同様に、n次の整式 $P(x)$ で、$P(0)=1$ をみたし、かつ $P(x)=0$ の解が $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n$ ならば

$P(x)=\left(1-\dfrac{x}{a_1}\right)\left(1-\dfrac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x}{a_n}\right)$　　と表されることを使います。

$x\neq 0$ で $P(x)=0$ の解は　$\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ -\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ -\dfrac{5}{2}\pi,\ \cdots$より因数定理を適用すると、

$P(x)=\left(1-\dfrac{2x}{\pi}\right)\left(1+\dfrac{2x}{\pi}\right)\left(1-\dfrac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\dfrac{2x}{3\pi}\right)\cdots$

$=\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$　　と無限個の積になります。x の昇べきに展開すると

$P(x)=1-\dfrac{4}{\pi^2}\left(1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots\right)x^2+\cdots$　　④　とおく

ここで③と④の x^2 の係数を比較すれば

$-\dfrac{1}{2!}=-\dfrac{4}{\pi^2}\left(1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots\right)$　　が成り立つので、これから

$1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$

x^4 の係数を比較すれば　　$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^4}+\cdots\cdots=\frac{\pi^4}{96}$

という計算もできます。

6

実は　$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{8}$ ①　この結果はバーゼルの問題の解

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ ②　から導くことができます。

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)$$

ここで　① の式 $=X$ ，② の式 $=Y$ とおくと　$Y=X+\frac{1}{4}Y$ となり、

$X=\frac{3}{4}Y=\frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$ つまり①の結果は②を含んでいることになります。

しかし、無限個の和の順序を勝手に変えてはいけないことを学んでいると思いますが、これが許される場合を考えてみましょう。

7

高校でも習いますが、2つの無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ がともに収束するとき

$\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n+db_n)=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n+d\sum_{n=1}^{\infty}b_n$　が成り立ちます。（ただし、 c , d は定数）

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ ②　において左辺を

$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$　とすることは可能です。

無限級数の和を考えるとき、絶対収束という考えは計算をスムーズにします。

ここで無限級数の順序を変えてはいけない例に触れましょう。

例　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=S$　とおきます。

$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots>\frac{1}{2}$　のはずですが

$S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\right)=0$　という変な計算が順序を変えるとできてしまいます。これは　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散することにより交換法則は使えません。