第23回　複素変数の対数関数と指数式

86

関数の最後は指数関数の逆関数である対数関数になります。

$w=\log z \iff z=e^{w}$　　の関係がありますから

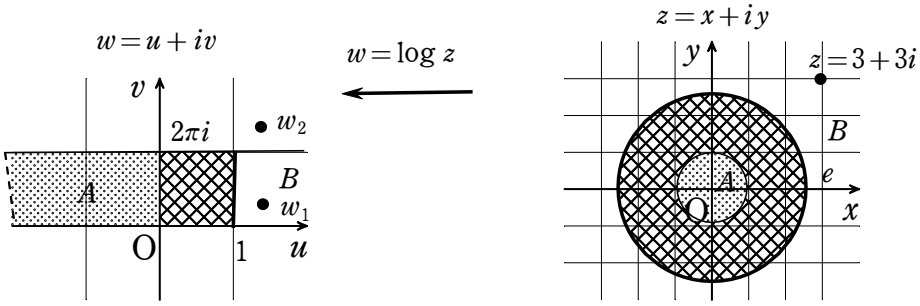
$w=u+iv$　　，　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　とおくと

$r(\cos\theta+i\sin\theta)=e^{u+iv}=e^{u}(\cos v+i\sin v)$　が成立します。

両辺を比較して　　$r=e^{u}$　$\therefore u=\log r$　、　$v=\theta+2n\pi$　（n は整数）

複素数の対数関数は　$\log z=\log re^{i\theta}=\log r+i(\theta+2n\pi)$　という無限多価関数です。

関数 $w=\log z$　の変数 z その像 w の対応は指数関数の逆なので下図になります。



関数 $w=\log z$ は変数 z が複素平面全体を動いても uv 平面では $v=0$ と $v=2\pi i$ で挟まれた帯状の領域に移ることになります。 xy 平面を何重にも重ねたリーマン面と考えると、点 z に対して uv 平面では点 w として $2\pi i$ だけ離れた無限個の点 $\{w_1, w_2, \cdots\}$ に移ることになります。

上の図では $z=3+3i$ に対して　$w_1=\log(3+3i)=\log 3\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i$　に移ったことを示します。

87

具体的に対数の計算をしてみましょう。

(1)　$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$　より　$\log(1+i)=\log\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)$

(2)　$-5=5e^{i\pi}$　より　$\log(-5)=\log 5+i(2n+1)\pi$

z の偏角 θ のとり方は無限にありますが、例えば $(0\leqq\theta<2\pi)$ に限定すると

$Log\,z=\log r+i\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$　となり、$\log z$ の主値といいます。

上の例では　$Log(1+i)=\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}i$　　$Log(-5)=\log 5+\pi i$　　となります。

$\log z$ の多価性より実数で成り立っていた公式が成り立たなくなります。

例　$\log z^2=2\log z$　は常に成り立つとは限りません。 $z=re^{i\theta}$ とおくと

$\log z^2=\log r^2e^{2i\theta}=2\log r+i(2\theta+2n\pi)$

$2\log z=2\log re^{i\theta}=2\{\log r+i(\theta+2n\pi)\}=2\log r++i(2\theta+4n\pi)$

虚部の値が $\log z^2$ では 2π 周期なのに対して $2\log z$ では 4π 周期になります。

同様に対数の基本的な性質　$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$　なども虚部が不一致となります。

このように、実数では当たり前だった性質の中で複素数では必ずしも成り立たないものに注意することが大事ですね。少し復習すると次の例がありました。

例1　$(1+2i)^2 = -3+4i$　ですが　$\sqrt{-3+4i} = \pm(1+2i)$　2つの値を意味します。

$w = \sqrt{z}$　は多価関数なので、2つの値をとります。

例2　$\sin 2i = \frac{1}{2i}(e^{-2} - e^{2}) = \frac{1}{2}(e^{2} - e^{-2})i$　より　$|\sin 2i| = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} > 1$　となります。

$|\sin z| \leqq 1$　や　$|\cos z| \leqq 1$　は成立しません。

88

一般のべきについても触れておきます。

$a, b \in \mathbf{C}$　$a \neq 0$　のとき　$a^b = e^{b\log a}$　と定義する

高校の指数･対数の演習問題に「$100^{-\log_{10} 2}$　の値を求めよ」というのがあります。この場合

$x = 10^{-2\log_{10} 2}$　とおいて　これを対数の関係にすると　$\log_{10} x = -2\log_{10} 2 = \log_{10} \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{4}$　となり　求める値は　$\frac{1}{4}$　です。

形は複素数でも同じですが、$a \in \mathbf{C}$　$a \neq 0$　のとき　$\log a$　の多価性より1つの値にはなりません。

例1　$i^i = e^{i\log i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2n\pi}$　不思議な値ですが、実数でかつ無限個です。

例2　$(-2)^3 = e^{3\log(-2)} = e^{3\{\log 2 + (2n+1)\pi i\}} = e^{3\log 2}(-1) = -e^{3\log 2} = -2^3 = -8$

当たり前の結果ですが、矛盾はないということです。

このように複素数の場合にも指数式は定義できましたが、多価性があることであまり使われないような気がします。

89

複素関数の微分と積分に入る前に、極限に関する基礎定理をいくつか挙げておきます。

(1) 複素関数 $w = f(z)$ において　$z \to z_0$ のとき　$f(z) \to w_0$ を　$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ と書き、

$\forall \varepsilon > 0$　$\exists \delta > 0$　　$\forall z$　$0 < |z - z_0| < \delta$　について　$|f(z) - w_0| < \varepsilon$　の意味ですが

z は z_0 以外の値をとって z_0 に近づくのがポイントで、$f(z)$ は w_0 と一致しても構いません。

複素平面上で $z \to z_0$ なので、その近づき方はあらゆる方向があります。

(2) 複素関数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が連続であることの必要十分条件は

$u(x, y)$ かつ $v(x, y)$ が (x, y) の関数として連続となることです。

(3) 初等関数（有理関数、三角関数、指数･対数関数など）は分母が 0 になる点や $\log z$ の $z = 0$ のような点を除き、いたるところ連続になります。

次は複素関数の正則性に進みます。