# 第25回　複素積分

94

今複素関数の内容に入っていますが、この講座を進めるにあたって参考にさせていただいた本を紹介します。それは「複素関数要論」青木利夫･樋口禎一＝共著（培風館）です。一般には数学の専門家の多くが高木貞治著「解析概論」を学ばれ、その内容が共有されていると思いますが、教科書的には「複素関数要論」が自分には理解しやすいものでした。

95

実関数では積分をする場合、実軸上のある区間で考えました。しかし複素関数の場合、複素平面（ｚ平面）上のある曲線に沿って積分することになります。そして一般の曲線を表すには、媒介変数表示が適切と考えます。

$f(t)\,,g(t)$ を実変数 $t$ の連続関数とすると、　$z=f(t)+ig(t)$　は $z$ 平面上において1つの連続曲線 $C$ を描きます。

例1（１）　$z=3t-2ti$　　$(-\infty<t<\infty)$

$x=3t\,,y=-2t$　より $t$ を消去すると

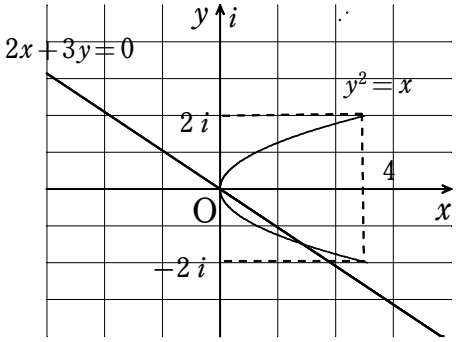
直線 $2x+3y=0$ となります。

(2)　$z=t^2+ti$　　$(-2\leqq t\leqq 2)$

$x=t^2\,,y=t$　より $t$ を消去すると

放物線 $y^2=x$ の部分　$(0\leqq x\leqq 4)$

となります。




96

いよいよ関数 $f(z)$ の、曲線 $C$: $z=z(t)$　（ $a\leqq t\leqq b$ ）上の定義になります。

区間〔$a\,,b$〕を分割し、その分点を　$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$　とします。

$z_j=z(t_j)$　　$\delta=max\ |t_j-t_{j-1}|$　とおくとき、

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(z_j\,')(z_j-z_{j-1})$$　　（ただし　$z_j'=z(t_j')$　$t_{j-1}<t_j'<t_j$　とする）

この極限値が有限確定のとき関数 $f(z)$ は曲線 $C$ 上で積分可能といい、　$\int_C f(z)dz$　で表す。

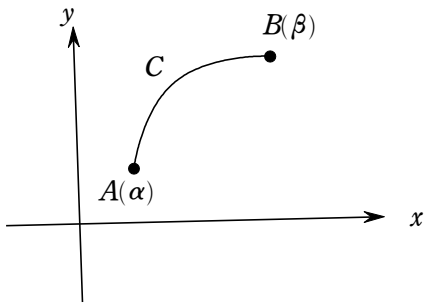
ここで注意すべきことは、 $f(z)$ が正則関数でないときは積分路 $C$ によって積分の値が変わってしまうのですが後で見ます。ただ、実変数の場合と同様に次の定理が成り立ちます。証明は省きます。

| $f(z)$ が曲線 $C$ 上で連続ならば積分可能である |
|---|

点Ａから点Ｂに至る曲線 $C$ があるとき、逆向きの点Ｂから点Ａに至る曲線を $C^{-1}$ で表します。
また、点Ｐから点Ｑまでの曲線を $C_1$ 、点Ｑから点Ｒまでの曲線を $C_2$ とすると、 $C_1$ と $C_2$ を連結した曲線を $C_1+C_2$ と表します。

97

具体的な線積分の例を見ていきましょう。




例1　2点 $\alpha, \beta$ を結ぶ曲線を $C$ とします。

(1) $\int_C 1\,dz$　を求めます。

積分の近似和は任意の分割 $\Delta$ に対して

$S_\Delta = \sum_{j=1}^{n} 1\cdot(z_j - z_{j-1}) = z_n - z_0 = \beta - \alpha$　より

$\therefore \quad \int_C 1\,dz = \beta - \alpha$

(2) $\int_C z\,dz$　を求めます。近似和として　$S_1 = \sum_{j=1}^{n} z_j(z_j - z_{j-1})$ と $S_2 = \sum_{j=1}^{n} z_{j-1}(z_j - z_{j-1})$

を考え、 $S_1 + S_2 = \sum_{j=1}^{n}(z_j + z_{j-1})(z_j - z_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n}(z_j{}^2 - z_{j-1}{}^2) = z_{n^2} - z_0{}^2 = \beta^2 - \alpha^2$　となります。

また、$f(z) = z$ は連続より　$\int_C z\,dz$　は存在します。 $\lim_{\delta\to 0} S_1 = \lim_{\delta\to 0} S_2 = \int_C z\,dz$

$\lim_{\delta\to 0}(S_1 + S_2) = 2\int_C z\,dz = \beta^2 - \alpha^2$ より　　$\therefore \quad \int_C z\,dz = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$　となります。

これら2つの例で大事なのは、 $f(z)$ が整関数のとき連続曲線 $C$ の積分路に関係なく、始点と終点で積分の値が決まることです。

98

線積分を計算する場合、曲線 $C$ は媒介変数表示されるので、置換積分法を説明します。

曲線 $C$ も、 $z = x(t) + iy(t)$　$(a \leqq t \leqq b)$　とおいたとき、 $z' = x'(t) + iy'(t)$　が　$[a, b]$ で連続、かつ $z' \neq 0$ となる正則曲線を意味するとします。

> （置換積分法）　　曲線 $C$ の式を $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ とします。
> $f(z)$ が曲線 $C$ 上で連続ならば
> $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$　　が成立する

この定理の形は実数の場合と同じなので覚えやすいと思いますが、証明はかなり難しいようです。

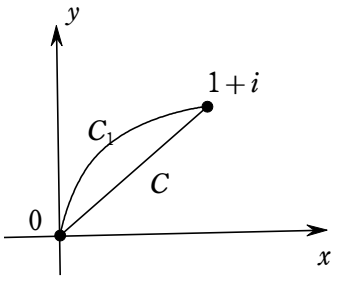
詳しくは参考文献を見てください。

例1　$f(z) = \overline{z} = x - iy$　のとき、これは正則関数ではありません。

(1) 直線 $C$ ： $z = t + it$　$(0 \leqq t \leqq 1)$ のとき

$\overline{z} = t - it$　　$dz = (1+i)dt$ より

$\int_C \overline{z}\,dz = \int_0^1 (t - it)(1+i)dt = 2\int_0^1 t\,dt = 1$




(2) 放物線 $C_1$ ： $z = t^2 + it$　$(0 \leqq t \leqq 1)$ のとき

$\overline{z} = t^2 - it$　$dz = (2t+i)dt$　より

$\int_{C_1} \overline{z}\,dz = \int_0^1 (t^2 - it)(2t+i)dt = \int_0^1 (2t^3 + t - it^2)dt$

$= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2} - i\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{i}{3}$

$f(z)$ が正則でない関数の場合、始点と終点が同じでも積分路が異なるときは値が異なります。

ここで微分積分の基本的関係をまとめておきます。

定義　　$F(z)$ が $f(z)$ の原始関数とは
$f(z)$ が領域 $D$ で定義され、 $F'(z)=f(z)$ となる $D$ において正則な関数をいう。

定理　（微分積分の基本的関係）
$f(z)$ は領域 $D$ で連続で、 $D$ において原始関数 $F(z)$ もつときを
$D$ 内の 2 点 $\alpha,\beta$ をそれぞれ始点と終点に持つ $D$ 内の正則曲線 $C$ に対して
$\int_C f(z)dz=F(\beta)-F(\alpha)$　が成り立つ

例2　例1と同様に、始点 $\alpha=0$ 、終点 $\beta=1+i$　とし、 $f(z)=z^2$ とします。

$\int_0^{1+i} z^2dz=\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1+i}=\frac{1}{3}(1+i)^3$　となります。

例1　にならい曲線 $C_1$ ： $z=t^2+it$ $(0\leqq t\leqq 1)$ に沿って積分するとします。

$\int_{C_1} z^2dz=\int_0^1(t^2+it)^2(2t+i)dt=\int_0^1\{(2t^5-4y^3)+(5t^4-t^2)i\}dt=-\frac{2}{3}(1-i)$　ですが

$\frac{1}{3}(1+i)^3=\frac{1}{3}(1+3i-3-i)=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i=-\frac{2}{3}(1-i)$　より2つの結果は同じになります。

次は正則関数とCauchyの積分定理に入っていきます。