第21回　複素変数の関数と1次変換

78

これからは複素数を変数とする関数を考えていきます。関数を $w=f(z)$ というスタイルをとり、z を独立変数、w を従属変数とします。高校では　$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$　$(ad-bc\neq 0)$　という、複素関数論では1次変換と呼ばれている関数が主だと思います。但し $a,b,c,d\in\mathbf{C}$ と考えてます。

$c\neq 0$ のときは　$w=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{z+\dfrac{d}{c}}+\dfrac{a}{c}$　と変形されるので、

1次変換は次の 3 つの基本変換　(1)　$w=z+\alpha$　　(2)　$w=\alpha z$　$(\alpha\neq 0)$　　(3)　$w=\dfrac{1}{z}$

を合成したものになります。

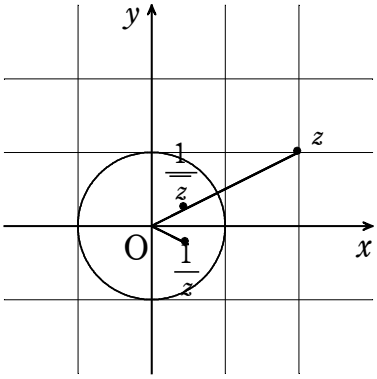
(1)　$w=z+\alpha$　は、複素平面上では平行移動になります。

(2)　$w=\alpha z$　$(\alpha\neq 0)$　は、$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると複素平面上では、原点の周りの θ 回転と原点を中心とする r 倍の相似変換になります。

(3)　$w=\dfrac{1}{z}$　は直線を円の特別な場合とみなした時の円円対応になります。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　とおくと、

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}=\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$



となりますから、単位円に関する点 z の反転 $\dfrac{1}{\overline{z}}$

をつくり、実軸に関する対称点が $\dfrac{1}{z}$ になります。

$z\longrightarrow\dfrac{1}{z}$　は単位円に関する点 z の反転 と

実軸に関する対称の組み合わせなので、$\dfrac{1}{z}\longrightarrow\dfrac{1}{\overline{\dfrac{1}{z}}}=z$ より

2 回この変換をすると元に戻りますね。

79

具体的な例で複素数の 1 次変換の様子を見ていきましょう。

例　複素数 z が $|z|=2$ を満たすとき、$w=\dfrac{2z+1}{z-1}$ で与えられる点 w はどのような図形を描くか。

高校では、$z=\dfrac{w+1}{w-2}$ と変形し、$|z|=2$ であるので　$\left|\dfrac{w+1}{w-2}\right|=2$　ゆえに　$|w+1|=2|w-2|$

両辺を２乗して　$|w+1|^2=4|w-2|^2$　　$(w+1)(\overline{w}+1)=4(w-2)(\overline{w}-2)$　となり

整理すると　　$w\overline{w}-3w-3\overline{w}+5=0$　　ゆえに　$(w-3)(\overline{w-3})=4$

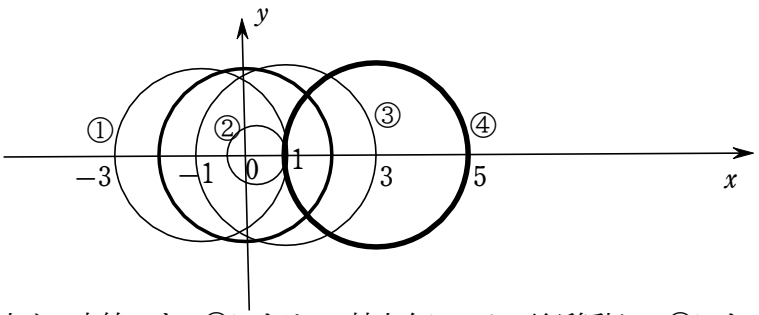
$|w-3|^2=4$　　よって　　$|w-3|=2$

つまり、点 w は、点 3 を中心とする半径 2 の円を描くとなります。

これを複素関数的に追跡してみましょう。

$w=\dfrac{2z+1}{z-1}=\dfrac{3}{z-1}+2$　となるので、78における (1) , (2) ,(3) の変換の組み合わせになります。

① $z\to z-1$　② $z-1\to\dfrac{1}{z-1}$　③ $\dfrac{1}{z-1}\to\dfrac{3}{z-1}$　④ $\dfrac{3}{z-1}\to\dfrac{3}{z-1}+2$　です。



$|z|=2$ の図形は少し太めの実線です。①により x 軸方向に -1 平行移動し、②によって中心 $\dfrac{1}{3}$ 半径 $\dfrac{2}{3}$ の円に移ります。③により円は拡大し、④の平行移動で太い実線になります。

$w(z)=\dfrac{2z+1}{z-1}$　より　$w(2)=5$ 、 $w(-2)=1$ で、元の円の直径の2点は移動した円の直径の 2 点に移っています。しかし、 $w(0)=-1$ となり円の中心は移動した円の内部に移りません。このことは②の変換において円の内部と外部が逆転することに注意すべきです。

80

高校ではド･モアブルの定理を使って $z^n=\alpha$ の解を求める問題がありますね。

例　方程式　$z^2=1+\sqrt{3}i$ の解を求めよ。

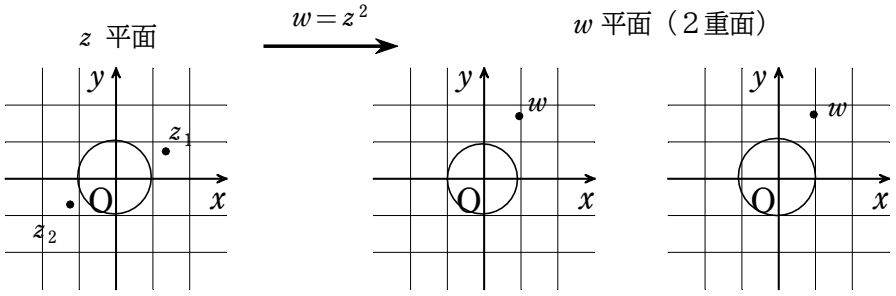
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと、 $z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$　であり

$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$　より絶対値と偏角を比較すると

$r^2=2$ 、 $2\theta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ （ k は整数）となり　$r=\sqrt{2}$ 、 $0\leqq\theta<2\pi$ で考えると $\theta=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7}{6}\pi$

求める解は　$z_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ 、 $z_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　となります。

これを複素関数 $w=z^2$ で考えてみます。一般には z 平面に対して w 平面はリーマン面と呼ばれる 2 重の平面になります。



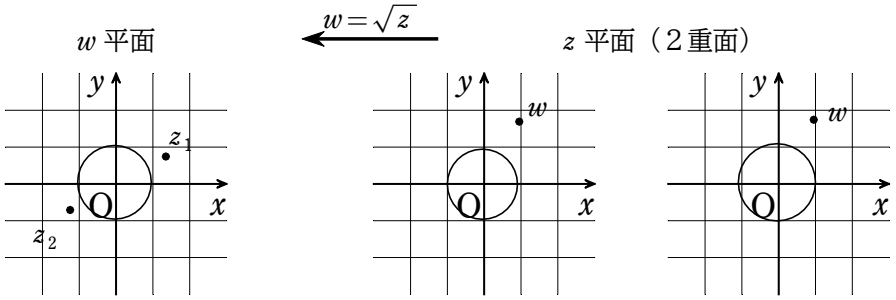
点 z が z 平面を O の周りを 1 周するとき、点 w は w 平面を O の周りを 2 周するので、$w=1+\sqrt{3}i$ に移される z 平面上の点は z_1,z_2 の 2 点になります。

81

80 において、複素関数 $w=z^2$ を取り上げましたが、その逆関数を考えることができます。

$z^2=1+\sqrt{3}\,i$ に対して $z_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ 、 $z_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ となりました。

この逆関数は $w=\sqrt{z}$ です。前とは逆に z 平面はリーマン面と呼ばれる 2 重の平面になり、w 平面が普通の複素平面になります。



$\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ， $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ のように $\sqrt{\alpha}$ は 2 つの値を表します。

関数 $w=\sqrt{z}$ は 2 価関数と呼ばれ、 これは実数の場合と異なるところです。
複素関数では実関数と同じ記号を使っていても意味が異なる場合がありますから、注意が必要です。

82

複素関数 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ に戻ります。この 1 次変換は複素数の 和・差・積・商という四則の基本的な演算でつくられた関数です。

また、図形的には”平行移動”と”相似変換”と”単位円に関する反転と実軸に関する対称”の組み合わせです。図形の変換の特色としては、直線を円の特別な場合とみなした時の円円対応などがあります。

次は複素変数の指数関数と三角関数に入っていきます。