第22回　複素変数の指数関数と三角関数

83

実関数として指数関数は次の 2 つの性質を持っています。

指数法則　$e^{x+y}=e^{x}e^{y}$　，　級数展開式　$e^{x}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$

x が複素数になったとしてもこれらの性質を保つように定義をしていきます。

$$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}\left\{1+iy+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}+\frac{(iy)^5}{5!}+\cdots\right\}$$

$$=e^{x}\left\{\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\right)\right\}$$

$$=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

と変形することが可能なので、改めて複素数の指数関数を次のように定義します。

$$\boxed{e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)}$$

この指数関数の性質として加法性と周期性があります。

（1）加法性　$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$　　（2）周期性　$e^{z+2\pi i}=e^{z}$　　$(z_1, z_2, z\in\mathbf{C})$ です。

ここで（1）の証明をします。 $z_1=x_1+iy_1$ 、 $z_2=x_2+iy_2$ とおくと

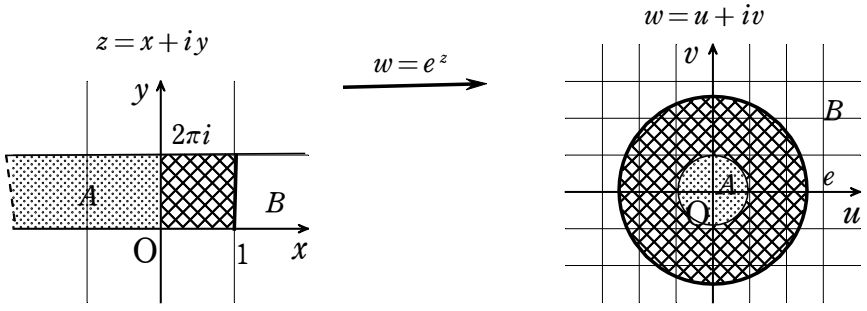
$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)$$

$$=e^{x_1+x_2}\{(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2)+i(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2)\}$$

$$=e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\}=e^{x_1+x_2+iy_1+iy_2}=e^{z_1+z_2}$$

（2）の証明は三角関数の周期が 2π より理解されると思います。このことから複素数の指数関数は虚数の周期をもつことになります。

関数 $w=e^{z}$ 変数 z とその像 w の対応を図に示すとつぎのようになります。



関数 $w=e^{z}$ は周期が $2\pi i$ より xy 平面における $y=0$ と $y=2\pi i$ で挟まれた帯状の領域は uv 平面全体に移ります。 $x=1$ の線分は　$u^2+v^2=e^2$ の円周に移ります。

上の図では、 A の部分は uv 平面では単位円の内部に、網線の領域は網線に移ることになります。

$z=x+iy$ の点が y 軸に平行に動けば $w=u+iv$ の点は原点の周りを何周も回ることになりますね。

また、よく使われる公式として　iy は虚軸なので $|e^{iy}|=1$ があります。

84

次は三角関数の定義になります。変数 z が複素数の場合、三角比や単位円周上の座標のような図形の性質は使えません。83 のところで、複素変数の指数関数に $\sin x$ と $\cos x$ が登場したのでこれを利用していきます。

x 実数のとき　　$e^{ix}=\cos x+i\sin x$　　$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$　　が成り立ちます。

これを変形すると　$\cos x=\dfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$　　$\sin x=\dfrac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$　　となります。

今この式が複素数 z で成り立つように $\sin z$, $\cos z$ を定義するのです。もちろん z が実数の場合はＯＫなので、あとは三角関数のいくつかの公式が満たされることを確認する必要があります。

(1)　$\cos^2 z+\sin^2 z=\dfrac{1}{4}\{(e^{iz}+e^{-iz})^2-(e^{iz}-e^{-iz})^2\}=\dfrac{1}{4}\cdot 4=1$

(2) 加法定理　　$\sin(z+w)=\sin z\cos w+\cos z\sin w$　　$z, w\in\mathbf{C}$

右辺$=\dfrac{1}{4i}(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw})+\dfrac{1}{4i}(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}-e^{-iw})$

$=\dfrac{1}{2i}(e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)})=\sin(z+w)=$左辺

三角関数の多くの公式が加法定理から導かれることを考えると、2倍角の公式や積を和･差の形にする公式なども成り立つことが予想されるでしょう。

あと x が実数のとき　$|\sin x|\leqq 1$　　$|\cos x|\leqq 1$　　が成立しましたが、複素数では成立しません。

反例として　$z=2i$ のとき　$\cos 2i=\dfrac{1}{2}(e^{-2}+e^{2})>1$　　などがあります。

85

$\sin z$ 、 $\cos z$ が定義されたことで、ほかの関数は実数のときと同じように定義されます。

$\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$　　$cot\, z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$　　$sec\, z=\dfrac{1}{\cos z}$　　$cosec\, z=\dfrac{1}{\sin z}$

いくつかの三角関数の計算をしてみましょう。

例１　$\sin(-z)=\dfrac{1}{2i}(e^{-iz}-e^{iz})=-\sin z$　　$\cos(-z)=\dfrac{1}{2}(e^{-iz}+e^{iz})=\cos z$

例２　$\sin\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iz+\frac{\pi i}{2}}-e^{-iz-\frac{\pi i}{2}}\right)=\dfrac{1}{2i}(e^{iz}i-e^{-iz}\cdot(-i))=\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z$

例３　$i\tan i=i\cdot\dfrac{\sin i}{\cos i}=i\cdot\dfrac{e^{-1}-e}{2i}\cdot\dfrac{2}{e^{-1}+e}=\dfrac{e^{-1}-e}{e^{-1}+e}=\dfrac{1-e^2}{1+e^2}$　　（実数値）

複素数では　　$e^{ix}=\cos x+i\sin x$　　$x=\pi$のとき　$e^{\pi i}+1=0$　　が象徴的ですね。