第24回　複素微分と正則関数

90

まずは複素微分の定義から始めましょう。複素関数 $f(z)$ は領域 D で定義されているとします。

$f(z)$ が $z=z_0$ で微分可能とは　$\lim_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$　が有限値に収束することです。

形の上では実数の場合と変わりませんが、いくつか異なる点があります。

まず、 Δz の 0 への近づけ方は 360° いろいろな方向が考えられます。また複素関数論では、z_0 を含む近傍で微分可能のとき、 $f(z)$ は点 z_0 で正則といいこの捉え方が重要です。

最初の一歩は、 $f(z)=z^n$ （nは正の整数) の微分です。

$f(z)-f(z_0)=z^n-{z_0}^n=(z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+{z_0}^{n-1})$　より

$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots{z_0}^{n-1})=n{z_0}^{n-1}$

予想通りの結果であり、 $f'(z)=z^{n-1}$　で $f(z)$ は複素平面全体で正則です。

また、 $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{z^n}\right)=-\dfrac{n}{z^{n+1}}$ なども示すことができ、 n は整数のとき、 $f(z)=z^n$ が成立します。

91

次は関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が、領域 D で正則であるための必要十分条件（コーシー・リーマンーの関係式）に移ります。

> $f(z)$ 実部と虚部の関数 u と v は連続な偏導関数を持つとき
> $f(z)$ が D で正則　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

まず簡単な例から見ていきましょう。

例1　$f(z)=(5x+2y)+i(5y-2x)$　のとき、 $u=5x+2y$, $v=5y-2x$　より

$u_x=5$　$u_y=2$　$v_x=-2$　$v_y=5$　　$\therefore$　$u_x=v_y$　$u_y=-v_x$

コーシー･リーマンの関係式より　$f(z)$ は全平面で正則となります。

ただここで $f(z)$ を変形すると　$f(z)=5(x+iy)-2i(x+iy)=(5-2i)z$　より

複素数として z の 1 次関数なので正則となるのも当然です。

例2　$f(z)=|z|^2=z\overline{z}=x^2+y^2$　のとき　$u=x^2+y^2$, $v=0$　より、原点以外では関係式を満たしません。原点の近傍で成立しないので、いたるところで正則ではないとなります。

例3　$g(z)=x(x^2-3y^2)+iy(3x^2-y^2)$　のとき　$u=x^3-3xy^2$, $v=3x^2y-y^3$

$u_x=3x^2-3y^2=v_y$　$u_y=-6xy=-v_y$　よって $g(z)$ は全平面で正則ですが、

この場合も $g(z)=(x+iy)^3=z^3$　という形であることに注意が必要です。

一般に初等関数と呼ばれるものは、分母を 0 にするような特別の点を除いて正則ですが、 x,y が $z=x+iy$ の形でまとまっていなければならないことが分かっています。

92

いよいよ関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ のとき、コーシー・リーマンーの関係式の証明です。

$f(z)$ 実部と虚部の関数 u と v は連続な偏導関数を持つとき $f(z)$ が D で正則 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

（証明）必要条件 （ $\Rightarrow$ ）点 $z_0=x_0+iy_0 \in$Dとし、 $\Delta z=h+ik$ とおくと

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{h,k\to 0}\frac{\{u(x_0+h,y_0+k)-u(x_0,y_0)\}+i\{v(x_0+h,y_0+k)-v(x_0,y_0)\}}{h+ik}$$

$f(z)$ が点 z_0 で微分可能とは、 $z\to z_0$ のとき、その近づく方向に関係なく一定の極限値 $f'(z_0)$ を持つということです。そこで、 z が x 軸に平行に動く場合と y 軸に平行な場合を考えます。

x 軸に平行なとき $k=0$ おくと

$$f'(z_0)=\lim_{k\to 0}\frac{\{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)\}+i\{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)\}}{h}=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

y 軸に平行なとき $h=0$ おくと

$$f'(z_0)=\lim_{k\to 0}\frac{\{u(x_0,y_0+k)-u(x_0,y_0)\}+i\{v(x_0,y_0+k)-v(x_0,y_0)\}}{ik}=\frac{1}{i}u_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0)$$

これら２つの $f'(z_0)$ は一致するので、実部と虚部を比較すると

$u_x=v_y$, $iv_x=\dfrac{1}{i}u_y$ つまり $v_x=-u_y$ となります。

十分条件 （ $\Leftarrow$ ） $u_x=v_y$, $v_x=-u_y$ という条件は x 軸方向と y 軸方向の 2 つの方向しか微分を考えていませんが、 Δz の 0 への近づけ方は 360° いろいろな方向が考えられます。これらの証明には 2 変数に関する平均値の定理が必要ですが参考文献などを見てください。

ここで重要と考えるのは、複素数を平面ベクトルと類似して考えれば、 Δz も x 成分と y 成分の 2 方向を考えて行けばよいと捉えることです。また、こんな例も考えられます。ある平面に垂直なベクトルは平面上のあらゆるベクトルと垂直ですが、実際は 2 方向との垂直条件で決まります。

93

ここまでの結果をまとめると $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が正則のとき

$f'(z)=f_x(z)=\dfrac{1}{i}f_y(z)$ もっと簡単に $\dfrac{d}{dz}=\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}$

例 $f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ のとき

$f'(z)=\dfrac{\partial}{\partial x}\{e^x(\cos y+i\sin y)\}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x$ となります。