第20回　ルベーグ 積分と関数解析

71

ルベーグ積分が重要視される理由は、ルベーグ収束定理の威力のためです。積分はルベーグ積分ですが、関数列を考えたとき、関数列の極限と積分の順序の交換が各点収束で成り立つ点がポイントです。まずは定理の内容から見ていきましょう。

レビの単調収束定理
可積分の関数列 $\{f_n(x)\}$ が単調増加　$0 \leqq f_1(x) \leqq f_2 \leqq \cdots$　で、
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$　（各点収束）ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

ルベーグの有界収束定理は次のようになります。

有界収束定理
関数列 $\{f_n(x)\}$ が上に有界　$\forall x \ \forall n \ \exists M>0 \quad |f_n(x)| < M$　ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$\int_a^b$ と $\lim_{n\to\infty}$ の順序交換を可能にする条件を各点収束にすることによって、関数解析学の分野では非常に利点がありました。関数解析では、不連続関数も含めて考えるので、各点収束しか望めない場合が多いようです。

72

これからは関数列を考えるのですが、高校の数学Ⅲに次のような例があります。

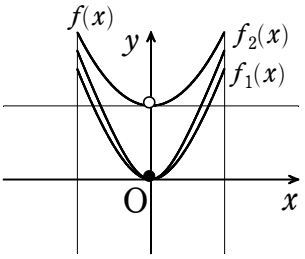
無限級数　$x^2 + \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} + \cdots$　　は公比が $\dfrac{1}{1+x^2}$ なので

すべての実数 x について収束します。第 n 部分和を $f_n(x)$ とすると関数列 $\{f_n(x)\}$ の極限を考えることと同じです。

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}\left\{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n\right\} = (1+x^2)\left\{1-\frac{1}{(1+x^2)^n}\right\}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

となります。
グラフを書くと右のようになります。



連続関数の列ですが、極限関数は $x=0$ において不連続です。
連続関数の極限が連続関数にならないということで、連続関数の集合には完備性がないという欠点があります。

73

上の例からわかるように、連続な関数列 $\{f_n(x)\}$ であったとしても、その極限関数 $f(x)$ が連続とは限りません。

ルベーグ積分で最も重要なことは、零集合上の関数の値は無視するということです。

区間$[a,b]$上で定義された2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が区間$[a,b]$上の零集合を除いて等しいとき

$f(x)=g(x)$ $a.e.$ $(almost\ everywhere)$ （＊） と書きます。

このときルベーグ積分の意味で $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$ が成立します。

（＊）が成立すれば、$f(x)$ と $g(x)$ は同じだとみなすことになります。

74

ルベーグ積分を用いた有力な応用例はヒルベルト空間 H です。代表的なものは、$L_2[a,b]$ で表され、2乗ルベーグ可積分関数の集合です。

つまり $x(t)\in L_2[a,b]$ とき $\int_a^b |x(t)|^2dt<\infty$ です。

また、$L_2[a,b]=\{x(t)\mid x(t)は[a,b]上実数値可測関数\}$ は、ベクトル空間の 条件を満たします。つまり、関数の和、スカラー積が定義され閉じています。また、結合法則を満たし加法について分配法則も成立します。

関数間の距離を測るものとしてノルムがあります。

ノルムとして、$\|x\|_2=\left\{\int_a^b |x(t)|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}$ と決めると、ノルムの公理（1）～（3）を満たします。

（1） $\|x\|_2\geqq 0$ $\|x\|_2=0 \iff x(t)\equiv 0$ $a.e.$ in $[a,b]$

（2） $\forall\,\lambda\in C$ $\|\lambda x\|_2=|\lambda|\,\|x\|_2$

（3） $\forall\,x,y\in L_2$ $\|x+y\|_2\leqq\|x\|_2+\|y\|_2$

これにより2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の距離は、$\|f-g\|_2=\left\{\int_a^b |f(t)-g(t)\|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}$ となります

75

関数空間においては、関数１つ１つがその集合の元になっています。上のようにノルムを決めることにより関数同士の距離が定まり、極限操作や収束を考えることができます。

一般に複素数 z について、$z\cdot\overline{z}=|z|^2$ （ $\overline{z}$ は z と共役 な複素数）より

複素数値をとる関数 $\varphi(t),\phi(t)$ に対しても

内積 $\langle\varphi,\phi\rangle=\int_a^b\overline{\varphi(t)}\cdot\phi(t)dt$ と定義すると、$\langle\varphi,\varphi\rangle=\int_a^b|\varphi(t)|^2dt$ となるので

$\|\varphi\|_2=\sqrt{\langle\varphi,\varphi\rangle}$ となりベクトルと同じことが成立します。

76

ヒルベルト空間にはいろいろな利点があります。

まず第１は、内積の構造を備えていることです。ベクトル空間ですが、内積が入ることで角度や長さを定義することができます。

次に、ノルムが定義されることにより、距離が決められ、関数列の収束が定義されます。そして L_2 空間では、ノルムをルベーグ積分で考えることにより、関数列の収束関数もまた L_2 空間の元となり、いわゆる完備な集合の性質も持ち合わせていました。

これらのことは、数学では応用の利く考察対象となりえます。

77

72のところで、連続関数の極限が必ずしも連続にならず、連続関数の集合が完備でないことを教えてくれます。

解析学は実数の連続性を出発点として理論が始まっています。確かに、有理数という世界でも加減乗除の四則演算においては十分でありました。しかし方程式の解や有理数列の極限を考えたときに連続性を備えた実数の世界がどうしても必要になってきました。

関数を集合の元と考えたときに、極限関数がまたその集合に含まれるという完備性が有利であり、ルベーグ積分が必要だったのです。

例　ディリクレ関数　　$\phi(x)=\begin{cases}1 & x(\text{有理数}) \\ 0 & x(\text{無理数})\end{cases}$　in　$[0,1]$ がありました。

関数　$f(x)=0$　in $[0,1]$　とするとルベーグ積分ではともに

$\int_0^1 \phi(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=0$　となり　$L_2[0,1]$ においては　$\phi(x)=f(x)$ とみなすことになります。

ここで実関数の積分から離れ、複素変数の関数論に進みます。