第19回　可測集合とルベーグ積分

67

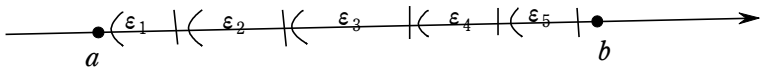
ジョルダン測度では面積が確定せず、積分が定義できない場合がありました。それを解消するためにルベーグ測度というものがあります。そこから始めます。

［ルベーグ測度］

まず1次元で考えます。区間$[a,b]=I$とおき、微小半開区間$\varepsilon_i>0$　$(i=1,2,3,\cdots)$　によってIの部分集合となる点集合$Q\subset I$の長さ（測度）を測ります。

点集合Qを覆った区間の和を$Q(\varepsilon)$とすると、$Q(\varepsilon)=\sum\varepsilon_i>Q$の長さ　となり

$inf\,Q(\varepsilon)=m^*(Q)$を$Q$の外測度といいます。



QのIにおける補集合$I-Q=Q^c$を考えます。（ここが大きなポイントです。）

今度は補集合　Q^cを微小半開区間で覆い、その和を$Q^c(\varepsilon)$とします。

すると　$Q(\varepsilon)$　と　$Q^c(\varepsilon)$　で　I　を覆いますから　　$I\subset Q(\varepsilon)+Q^c(\varepsilon)$

よって　　$|I|\leqq inf\,Q(\varepsilon)+inf\,Q^c(\varepsilon)=m^*(Q)+m^*(Q^c)$　となります。

$|I|-m^*(Q^c)\leqq m^*(Q)$　となり、左辺の　$|I|-m^*(Q^c)=m_*(Q)$　をQの内測度と決めます。

（内測度をその集合の補集合の外測度から決めていくという考えはとても斬新です。）

内測度≦外測度　となりますが、$max|\varepsilon_i|\to 0$のとき　内測度＝外測度　となれば

点集合Qはルベーグ可測であるといい、その値$m^*(Q)=m_*(Q)=m(Q)$をルベーグ測度といいます。

例3　ディリクレ関数　　$\phi(x)=\begin{cases}1 & x(\text{有理数})\\ 0 & x(\text{無理数})\end{cases}$　区間$[0,1]$　において

集合$Q=\{x\mid x\in[0,1],\phi(x)=1\}$　は区間$[0,1]$　における有理数の集合ですが、

Q　のルベーグ測度は　$m(Q)=0$　となり、　無理数の測度は$m(Q^c)=1$　となります。

［可測集合の主な性質］

(1) 1点の測度は零である。

(2) 可算個の点集合は可測でその測度は零である。

(3) 測度は0以上である。$m(Q)\geqq 0$

(4) 任意の有界集合　P,Qについて　$P\subset Q$　ならば　$m(P)\leqq m(Q)$

(5) $\forall i,j$について$P_i\cap P_j=\varnothing$　ならば

$m(P_1\cup P_2\cup\cdots)=m(P_1)+m(P_2)+\cdots$　　（完全加法性が成り立つといいます）

(6) 可測集合　P,Qについて　$P\cap Q$，$P-Q$　も可測集合である。

実際には、ほとんどの集合が可測集合で、可測でない集合の例を示すのが困難です。

68

［可測関数］

可測関数とは、区間$[a,b]$の$f(x)$において、任意の実数γに対して、
集合$\{x \mid f(x)>\gamma\}$がルベーグ可測のとき、$f(x)$を可測関数といいます。

実際には、ほとんどの関数が可測関数で、可測でない関数を探すのが困難です。

［可測関数の性質］

区間$[a,b]$における可測関数を考える。

（1）α，β　を任意の実数とすると　$\alpha f(x)+\beta g(x)$　は可測関数である。

（2）積　$f(x)\,g(x)$　は可測関数である。

（3）$\{f_n(x)\}$が可測関数列のとき、$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$　は可測関数である。

この定義の場合、閉区間$[a,b]$で有界な関数は連続でなくても、リーマン積分可能となりえます。

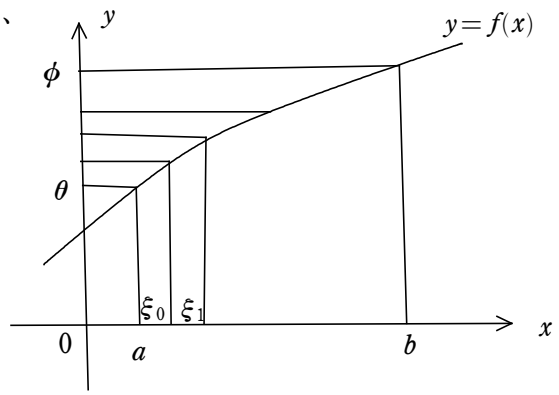
69

〔ルベーグ積分〕

関数$f(x)$の変域は$a\leqq x\leqq b$，値域は$\theta\leqq y\leqq\phi$とし、
値域$[\theta,\phi]$を分割します。

$\theta=f_0<f_1<f_2<\cdots<f_n=\phi$

但し　$f_i=f(t_i)$　とします。



$f_0\leqq y\leqq f_1$　に対応するxの集合をξ_0とする。

$f_1\leqq y\leqq f_2$　に対応するxの集合をξ_1とする。

……

$f_{n-1}\leqq y\leqq f_n$　に対応するxの集合をξ_{n-1}とする。

各集合$\xi_i\,(i=1,\cdots,n-1)$のルベーグ測度を$m(\xi_i)=m_i$　とし

$s=f_0m_0+f_1m_1+\cdots+f_{n-1}m_{n-1}$

$S=f_1m_0+f_2m_1+\cdots+f_nm_{n-1}$

とすると、$s\leqq S$　ですが、$f_{i+1}-f_i=\Delta_i\to 0$　となるように分点を無限にしたとき、分点の取り方に関係なく　$s=S$　が成り立つとき、$f(x)$　はルベーグ積分可能であるといい、この値をルベーグ積分値といいます。

ルベーグ積分で最も重要なことは、零集合上の関数の値は無視するということです。

区間$[a,b]$上で定義された2つの関数$f(x)$と$g(x)$が区間$[a,b]$上の零集合を除いて等しいとき

$f(x)=g(x)$　*a.e.*　(*almost everywhere*)　と書きます。

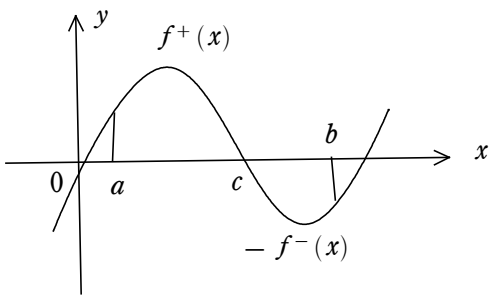
このときルベーグ積分の意味で　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$　が成立します。

［正値関数］

ルベーグ積分では、関数値が正となる部分と
負になる部分を分けて考えます。

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)\geqq 0 \text{ のとき} \\ 0 & f(x)<0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases} 0 & f(x)\geqq 0 \text{ のとき} \\ -f(x) & f(x)<0 \text{ のとき} \end{cases}$$



という2つの正値関数を考えて $f(x)$ を

$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$　として 2 つの正値関数の差で表します。

ルベーグ積分では正値関数の積分だけを考えればよいので

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f^+(x)dx-\int_a^b f^-(x)dx$　という計算になります。

ここで、一般に積分のできる関数の包含関係は
{多項式全体} ⊂ {連続関数全体} ⊂ {リーマン可積分関数全体} ⊂ {ルベーグ可積分関数全体}
となりますが、一部例外がありリーマン可積分でもルベーグ可積分でない例があります。

例　広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$　として
有名な例です。リーマン積分可能ですが、
ルベーグ積分の場合

$f(x)=\frac{\sin x}{x}=f^+(x)-f^-(x)$　とすると、

$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty f^+(x)dx-\int_0^\infty f^-(x)dx=\infty-\infty$

となり、不定形で極限は存在しません。

