第18回　リーマン積分

63

実数の連続性の公理から始まり、平均値の定理まで来て微分の話になるのが普通の解析のテキストだと思いますが、この講座を見てくださる方は多分微分の計算には慣れている方が多いと思います。

高校の数学の教科書にある微分の応用は省略して、我々が高校で学ぶ積分の理論（リーマン積分）について考えていきます。

高校におけるリーマン積分の定義の仕方は、かなり限定的な関数に限られているといえます。

たとえば $\int_a^b f(x)dx$ と書いたとき、積分区間は、閉区間$[a,b]$ で、被積分関数は連続関数です。

ゆえに、最大最小が存在し有界な関数であり、有界性と連続性は積分においてかなり恵まれた条件となります。

それゆえに、この有界性と連続性を満たさなくても積分が可能であるかどうかが問題となります。

また、関数列$\{f_n(x)\}$ において $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx$ が成り立つ条件も問題です。

歴史的にも多くの偉大な数学者が間違えました。関数列$\{f_n(x)\}$ の一様収束性があれば成り立つのですが、それは十分条件であり必要十分条件ではありません。積分できる関数の幅を広げたり、

$\int_a^b$ と $\lim_{n\to\infty}$ の順序交換を可能にする条件を緩和したりする方向性を求めてルベーグ積分が生まれてきたといえます。まずはリーマン積分の定義を述べます。

64

関数　$y=f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続、$f(x)\geqq 0$ とします。

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値は　$S=\{(x,y)\mid a\leqq x\leqq b,0\leqq y\leqq f(x)\}$ の面積です。

ここでのポイントは

1．$f(x)$ が連続であれば、S は必ず面積を持つ。

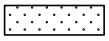
2．$f(x)$ が連続でなくても、図形S の面積は確定する$f(x)$ の条件を求めていき、そのとき$f(x)$ は定積分可能となる。

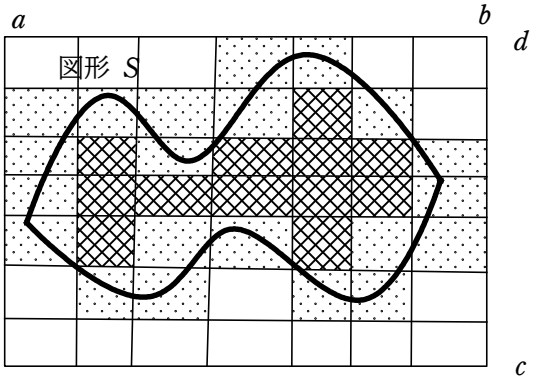
3．$f(x)$ が有界であることは必要条件とする。
有界とは　$\forall x\in[a,b]\ \exists M>0\quad 0\leqq|f(x)|\leqq M$　という条件です。

> 定義　$f(x)$ がリーマン積分可能であるとは
> $f(x)$ の作る図形S がジョルダンの意味で面積確定で
> $S=\int_a^b f(x)dx$　と表す。

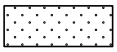
ジョルダンの意味で面積確定とは、ジョルダンの外測度$|S|^*$ と内測度$|S|_*$ が一致することですが、もう少しわかりやすく説明します。面積の基本は、1辺の長さがそれぞれ a,b である長方形の面積を ab とします。今平面上に有界な図形 S が与えられたとき、S はある長方形に含まれます。

長方形を　$\{(x,y)\mid a\leqq x<b,c\leqq y<d\}$　とします。

この長方形を縦方向に n 分割し、
横方向にも m 分割します。
小さい長方形の中で、すべて
図形 S に含まれるものは
 で表し、
一部分踏まれるものは
 で表します。



 の部分の合計を内測度 $|S|_*$

 と  の合計を外測度 $|S|^*$ とします。

分割を十分細かくしていき、外測度 $|S|^*$ ＝内測度 $|S|_*$ のとき、 S はジョルダンの意味で面積確定といい、 $|S|=|S|^*=|S|_*$ とおいて S の面積とします。

65

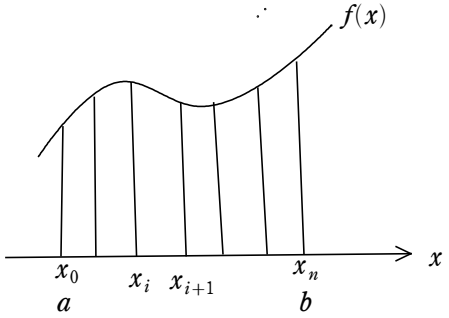
リーマン積分可能の数式による説明をします。

$M_i=\sup_{x_i \leqq x < x_{i+1}} f(x)$ $(0 \leqq i \leqq n-1)$

$m_i=\inf_{x_i \leqq x < x_{i+1}} f(x)$ とおくと

$|S|^*=\inf \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$

$|S|_*=\sup \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ となります。



$|S|^* \geqq |S|_*$ は常に成立するので $Max\ (x_{i+1}-x_i) \to 0$ のとき

$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i) \to 0$ が成り立てば $|S|^*=|S|_*$ となり、

$f(x)$ はリーマン積分可能になる。

この定義の場合、閉区間 $[a, b]$ で有界な関数は連続でなくても、リーマン積分可能となりえます。

66

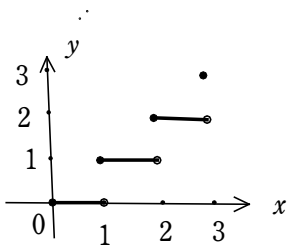
<u>リーマン積分可能な不連続関数の例</u>

例1　ガウス記号の関数には不連続点があります。

$f(x)=[x]$　$(0 \leqq x \leqq 3)$ と x 軸で挟まれた部分の面積は

$\int_0^3 [x]\,dx=\int_0^1 0dx+\int_1^2 1dx+\int_2^3 2dx=0+1+2=3$

と計算します。



例2　$f(x)=\begin{cases}0 & x=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \\ 1 & \text{それ以外}\end{cases}$　$\int_0^1 f(x)dx=1$ となります。

リーマン積分可能ではない例

例3　ディリクレ関数　$\phi(x)=\begin{cases}1 & x(\text{有理数})\\ 0 & x(\text{無理数})\end{cases}$　区間$[0,1]$の細分（$x_{i+1}-x_i$）で

$Max\ (x_{i+1}-x_i)\to 0$ としても　$M_i-m_i=1$ なので　$\int_0^1 \phi(x)dx$　はリーマン積分できません。

関数がリーマン積分可能であるためには、振幅に制限がつきます。余りに多くまたは余りに大きくジャンプする関数は積分不可能です。例 3 は至るところでジャンプしているからです。

> 定理　閉区間$[a,b]$で有界な関数$f(x)$がリーマン積分可能となる必要十分条件は
> $f(x)$の不連続点の集合が、零集合（測度 0 ）となることである。

> 定義　数直線上の集合Sが零集合（測度 0 ）とは
> $\forall\varepsilon>0$　高々可算個の区間列　$I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$　が存在し、
> (1) $S\subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)<\varepsilon$　　となること

測度 0 の集合には可算集合以外に連続体の濃度を持つカントル集合なども入ります。
零集合（測度 0 ）については次の回に説明します。