第17回　ロピタルの定理

60

次は平均値の定理の拡張とみられるコーシーの定理に進みます。

> コーシーの定理
> 関数 $f(x)$, $g(x)$ が閉区間〔a, b〕で連続で、開区間 (a, b) で微分可能、
> $g'(x) \neq 0$ ならば　$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$　　$a < c < b$
> を満たす実数 c が存在する。

（証明） $g(b) = g(a)$ ならば、ロルの定理より、$\exists\ \xi$ （ $a < \xi < b$ ） s.t. $g'(\xi) = 0$ となるので、
仮定の $g'(x) \neq 0$ に矛盾してしまう。よって分母は $g(b) - g(a) \neq 0$　と考えます。

$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = k$ とおくと　$f(b) - f(a) - k\{g(b) - g(a)\} = 0$　が成立します。

いま、 $F(x) = f(x) - f(a) - k\{g(x) - g(a)\}$ とおくと、 $F(b) = F(a) = 0$ が成立するので
ロルの定理より (a, b) 内のある値 c が存在して　$F'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0$　となります。

$\therefore$　$k = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$　したがって　$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$　が成立します。

この定理から、極限値を求めるときに用いられるロピタルの定理が導かれます。

61

フランスの数学者ロピタル（L'Hospital）の定理です。

> ロピタルの定理
> 関数 $f(x)$, $g(x)$ が $f(a) = g(a) = 0$ を満たし、
> $x = a$ の近くで微分可能であって、 $g'(x) \neq 0$　のとき
> $$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

この定理にはいくつかの条件があります。また左辺は右辺の十分条件なので、逆は不成立です。また高校の数学教育はもちろん、一般の数学書にも取り上げられないことはありますね。

（証明）コーシーの定理より、 a と x との間にある値 ξ をとれば、

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$　が成立します。 $x \to a$ のとき　$\xi \to a$　ですから

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\xi \to a} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l$　となります。

このロピタルの定理は、不定形 $\dfrac{0}{0}$ 以外にも、 不定形 $\dfrac{\infty}{\infty}$ や　$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ 、 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$
の場合にも適用できることが知られています。

具体例を挙げていきます。

例1　$\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\dfrac{2x+2}{2x-3}=\dfrac{4}{-1}=-4$

例2　$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{4\cos 2x}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

意外とうまくできますね。よく関数の増減で、$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$　を使うことがありますが

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\cdots}\dfrac{n!}{e^x}=0$　と説明できます。

ロピタルの定理が利用できない場合をあげてみます。

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{1}=$振動する　　$\therefore$　$\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在しません。

しかし　$0<\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$　より　$\lim_{x\to 0}|x|=0$ から　$\lim_{x\to 0}\left|\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}\right|=0$

つまり　$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=0$　は存在しています。

ロピタルの定理は条件をしっかり確認して使うようにすべきですね。

ここで数学史における　ロル、コーシー、ロピタル　の関係を押さえておきます。主な数学者の活躍した年は次のようになります。

ニュートン（英）1642－1727　ライプニッツ（独）1646－1716　　ロル（仏）1652－1719

ロピタル（仏）1661－1704　　オイラー（スイス）1707－1783　　コーシー（仏）1789－1957

ベルヌーイ一家（スイス）多くの数学者を出しており、その1人ヨハン1667－1748

ロル、ロピタルと並んでコーシーの定理をあげていますが、時代はずいぶん違うようです。この当時いろいろな国の学者がいますが、数学はもっぱらラテン語で書かれていました。オイラーやヨハンはロシアで活動していたこともあり、ラテン語という共通語で科学を推し進めていたことが分かります。18世紀、19世紀の科学の共通語としてのラテン語の役割は現在英語になっています。

日本の数学教育も英語で書かれた教科書が待ち望まれます。