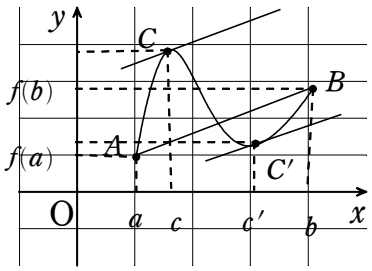
第16回　平均値の定理

57

　次は関数の連続性の中の一様連続という内容に入る番ですが、これは積分のところで触れます。
高等学校の教育課程では平均値の定理が次の内容となります。教科書では図形的な直観を大事にして「一般に、次の平均値の定理が成り立つ」と導入しています。

平均値の定理
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a\,,\,b]$ で連続で、
開区間 $(a\,,\,b)$ で微分可能ならば、
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 、 $a<c<b$
を満たす実数 c が存在する。

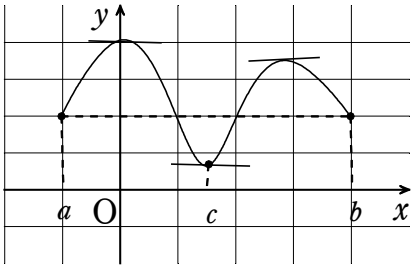


　高校の数学では、この定理を図形的に理解するように説明されます。
線分ＡＢと平行な接線が引けるような点Ｃが、2点Ａ、Ｂ間の曲線上にあるわけです。
この講座ではロルの定理から順番に行いたいと思います。

58

　フランスの数学者ロルの定理です。

ロルの定理
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a\,,\,b]$ で連続、
開区間 $(a\,,\,b)$ で微分可能であって、
$f(a)=f(b)$ であれば
$f'(c)=0$ 、 $a<c<b$
を満たす実数 c が存在する。



（証明）連続関数 $f(x)$ は閉区間 $[a\,,\,b]$ で最大値と最小値をとります。その最小値を開区間 $(a\,,\,b)$ 内の c でとるとすると、閉区間 $[a\,,\,b]$ の任意の値 x に対して　$f(c)\leqq f(x)$ が成り立ちます。
$f(x)$ が微分可能より　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c)$　は存在しますが、$f(c+h)-f(c)\geqq 0$　より

$h>0$ ならば　$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqq 0$　　$\therefore$　$f'(c)\geqq 0$

$h<0$ ならば　$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqq 0$　　$\therefore$　$f'(c)\leqq 0$

よって、$f'(c)=0$　となります。
　$f(a)=f(b)$ が最小値であるときは、最大値を開区間 $(a\,,\,b)$ 内の c でとるとして、
同様に $f'(c)=0$ が示されます。

（続けて平均値の定理を証明します。）

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$ とおくと　$f(b)-f(a)-k(b-a)=0$ が成立します。

$F(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$ とおくと　$F(a)=F(b)=0$　よりロルの定理から
開区間 (a,b) 内のある値 c に対して　$F'(c)=f'(c)-k=0$　となります。

$\therefore$　$k=f'(c)$　したがって　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$　$a<c<b$　となる c が存在します。

59

平均値の定理は、次のように書いて用いることもありますね。
$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$　　$(a<c<b)$　また、$b=a+h$ 、$c=a+\theta h$　$(0<\theta<1)$ として
$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$　　$(0<\theta<1)$　　などです。

高等学校における平均値の定理の重要性は、導関数の符号と関数の増減に関する性質でしょう。

1. 開区間 (a,b) で常に $f'(x)>0$ ならば　$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で単調に増加する。
2. 開区間 (a,b) で常に $f'(x)<0$ ならば　$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で単調に減少する。
3. 開区間 (a,b) で常に $f'(x)=0$ ならば　$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で定数である。

（1.の証明）閉区間 $[a,b]$ において、$a\leqq u<v\leqq b$ を満たす任意の2つの値 u,v をとると
平均値の定理より　$f(v)-f(u)=(v-u)f'(c)$　$u<c<v$　を満たす実数 c が存在する。
いま、$v-u>0$ 、$f'(c)>0$　より　$f(v)>f(u)$
したがって、$f(x)$ は $[a,b]$ で単調に増加します。

高等学校の数学において、平均値の定理が不可欠である理由としては上のような性質が大事だからだと思いますが、n 階微分可能な関数についてはテイラーの公式があります。（解析概論より）

Taylorの公式　ある区間において、$f(x)$ は第 n 階まで微分可能であり
その区間において a は定点、x は任意の点とするとき

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\cdots+(x-a)^{n-1}\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

（ただし　$\xi=a+\theta(x-a)$、$0<\theta<1$ ）　となる。

平均値の定理はこのTaylorの公式の $n=1$ の場合であり、高校で扱うほとんどの関数は上の条件に当てはまるので、関数を級数の形に表現することを目指していると思われます。

この講座では、関数の変数を複素数にまで拡張することを考えていますが、取り扱う関数は初等関数というものです。初等関数の中には、整関数、有理関数、三角関数、指数関数、対数関数、およびそれらの合成関数が入ります。これらは正則関数であり無限級数に展開できます。

次は平均値の定理の拡張とみられる「コーシーの定理」と極限値を求めるときによく用いられる「ロピタルの定理」に進みたいと思います。