第3回　オイラー

(オイラーの公式)

〔1〕 レオンハルト･オイラー（Leonhard Euler, 1707－1783) 数えで77歳　スイス　について

父親はプロテスタントの牧師であり、母親の家柄も教会に関係していたので、オイラーは聖職者になることを期待されていた。オイラー家は貧しかったが、早くから驚くべき記憶力と語学の才を示していた。一度聞いた話の内容や、詩や素数のリストなどを覚えており、また紙や鉛筆を使わないで複雑な計算を暗算で行うことができた。オイラーの驚くべき計算能力は天賦のものであった。父親は、オイラーに数学の初歩だけでなく、神学や医学や天文学や物理学なども教えた。

オイラーがスイスのバーゼルで生まれたことは、天の配剤（絶妙な取り合わせ）とでもいうべきかもしれない。バーゼル大学ではヨハン･ベルヌーイが数学の教授であったからだ。オイラーは14歳で大学に入学し、ヨハンに数学を教えてもらうという幸運に恵まれた。

1727年(21)船のマストの立て方についての論文でパリ科学アカデミーから等外賞を得ている。

ロシアのペテルブルク･アカデミーにヨハンの推薦で医学および生理学部門の教授となった。ここではヨハンの息子のダニエルの家に住み、物理学や数学の議論を行っていた。まもなくダニエルはバーゼルに戻り、オイラーがアカデミーの数学の主任となった。

1735年(29)バーゼルの問題（1644年にイタリアの数学者メンゴリが提起した）を解いた。

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

誰も予想のしなかった答だった。これにより世界的な名声を博した。

この年、オイラーは右目の視力を失ってしまった。また、エカテリーナ一世の突然の死によりロシア政局には不安定さがあった。このような状況でも研究の手を休めることはなく、造船や音響学の論文を書き、数論では解析数論についての論文も書いた。また『力学』という著作も書いたが、ニュートン力学を解析を用いて書いたものであり、「物理学の歴史の金字塔」ともいわれるものとなった。また自然対数の底を表す記号 e が初めて印刷され普及することになった。

1741年(35)プロシアのフリードリヒ大王よりベルリン科学アカデミーに招かれることになった。

1748年(42)『無限解析』を著した。

1755年(49)複素数の研究に入り、有名なオイラーの公式　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　を導いた。

王妃への教育も頼まれ、『ドイツの王妃への手紙』という科学史上たぶん最初の本格的な啓蒙書を書いた。内容は光、音、重力、論理、言語、磁気、天文など様々な分野にわたっている。この本は国際的な広い反響を惹き起こした。

オイラーはフリードリヒ大王やベルリン科学アカデミーの幹部との間に不和が生じていた。

1766年(60)再びペテルブルクに戻る。

1771年(65)残った左目も視力を失い、完全に失明した。しかし、この後も数学の研究を続け、多くの論文を書いている。

1773年(67)妻のカタリーナが亡くなる。

1783年(77)9月18日に亡くなる。数えで77歳であった。

〔2〕 オイラーの公式

日本の小説に小川洋子著「博士の愛した数式」があります。ぜひ一度読んでみることをお勧めしますが、その本の題名にある「数式」はオイラーの発見した公式です。

$\boxed{e^{i\pi}+1=0}$　　が成立するというものです。

この式の際立つ特徴は、数学の中で使われる 5 つの定数が含まれていることです。

0 は加法の単位元、 1 は乗法の単位元、π　は円周率です。

i は虚数単位、 e は自然対数の底で $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.718281828\cdots$　ですね。

e はネイピア数ですが、欧米では一般にオイラー数と呼ばれているようです。Eulerの頭文字である”e”をオイラーが使い始めて定着したようです。ただオイラー定数 γ というものもあり

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log n\right\}=0.57721566\cdots$$　です。

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$　がすべての実数で成り立ちますが、 x を複素数 z に置き換えたものを複素数の指数関数として定義し、 $z=ix$ を代入すると

$$\begin{aligned}e^{ix}&=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\\&=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)\\&=\cos x+i\sin x\end{aligned}$$　が成立します。

$x=\pi$ を代入して　$e^{i\pi}=-1$　　$\therefore$　$e^{i\pi}+1=0$

参考資料

・志賀浩二『数学の流れ30講　中　－17世紀から19世紀まで－』(朝倉書店2008年)

・安倍齊『微積分の歩んだ道』（森北出版1989年）

・W.ダンハム『オイラー入門』（丸善出版2012年）

・高木貞治『解析概論』（岩波書店1972年）