第15回　関数の連続性

54

この講座の目的は、高等学校で習う数学Ⅲから大学１・２年次への学習の橋渡しができればと考えています。本来は実数の連続性の公理からスタートするのが正しいのでしょうが、オイラーの無限級数から極限を考えるという歴史をたどる方法をとりました。

今現在の位置は、4つの同値な実数の連続性の公理から少しづつ発展させています。次は関数の連続性の番です。関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ というコンパクト集合において成り立つ、中間値の定理、コンパクト集合で最大値と最小値をとること、一様連続という内容です。高校では直感的なイメージで納得していました。一般にはそれでもいいのかもしれませんがそれを厳密に証明するという態度が数学なのでしょう。

55

まずは関数の連続性の定義から

> 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは、
> $f(x)$ が a およびその近くで定義され、
> $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$　$|x-a|<\delta$　のすべての x について　$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$　となる

ここで注意することは、普通の極限の場合 $\lim_{x\to a} f(x)=b$ では、$0<|x-a|<\delta$ となっていて、つまり x が a とは異なる値をとって a に近づけるのですが、今 $f(a)$ は存在するので $x=a$ となってもよく　$|x-a|<\delta$　となっています。

> 中間値の定理
> 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で $f(a)\neq f(b)$ ならば
> $f(x)$ は $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して
> $f(c)=k$ を満たす実数 c が a と b の間に少なくとも1つある

一般には $f(x)-k$ を改めて $f(x)$ と考えることで次のような形で利用されますね。

> 中間値の定理
> 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で $f(a)$ と $f(b)$ とが異符号ならば
> $f(c)=0$ を満たす実数 c が a と b の間に少なくとも1つある

（証明）区間縮小法で証明します。いま $f(a)<0$, $f(b)>0$ とします。

$I_0=[a,b]$ とおき　$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ の符号を調べます。

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ のとき　$a_1=\frac{a+b}{2}, b_1=b$　　$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ のとき　$a_1=a, b_1=\frac{a+b}{2}$

とおくと　$f(x)$ は $[a_1,b_1]$ で連続であり　$f(a_1)<0<f(b_1)$ が成立します。

もし　$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$　ならば　$c=\frac{a+b}{2}$ となって定理は成立します。

この操作を　$I_1=[a_1,b_1]$　$I_2=[a_2,b_2]$　… と続けていきます。

途中で　$f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)=0$　となれば c が存在することになります。

$I_1\supset I_2\supset\cdots$　と無限に続いていくと　$\lim_{n\to\infty}|I_n|=0$　より　区間縮小法の原理から

$\{I_n\}$ の極限は1点 c が存在します。つまり　$\lim_{n\to\infty}a_n=c=\lim_{n\to\infty}b_n$　です。

つぎに、関数 $f(x)$ は連続より

$$\begin{cases} f(a_n)<0 & \lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(c)\leqq 0 \\ f(b_n)>0 & \lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(c)\geqq 0 \end{cases}$$

よって　$f(c)=0$　定理は証明されました。

実数の連続性の公理の中では区間縮小法が分かりやすいかもしれません。実際、数値計算で方程式の解の近似値を求める場合もこの区間縮小法で絞っていきますね。

56

次は最大値・最小値の定理です。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続ならば、 $f(x)$ は $[a,b]$ で最大値と最小値をとる

（証明）まず、 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で有界であることを示します。

背理法で証明します。 $f(x)$ が $[a,b]$ で上に有界ではないと仮定すると

$\forall n\in\mathbf{N}$　$\exists x_n\in[a,b]$　$f(x_n)>n$　となります。このとき数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$ です。

$\{x_n\}$ が有界なので、定理５（Weierstrassの定理) より 集積点 $c\in[a,b]$ があり、

$\{x_n\}$ から c に収束する部分列 $\{y_n\}$ をとることができます。

そして $f(x)$ の連続性より　$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{y_n\to c}f(y_n)=f(c)$　（１）　となります。

また、 $y_n=x_{n+k}$ となる k は存在するので　$f(y_n)=f(x_{n+k})>n+k\geqq n$　となり

$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=+\infty$　（２）　となってしまいます。

（１）と（２）は明らかに矛盾するので $f(x)$ は $[a,b]$ で上に有界です。

下に有界の場合も同様に証明されることは理解されるでしょう。

次に、 $f(x)$ の閉区間 $[a,b]$ における上限 M・下限 m は存在しますが、

$f(\alpha)=M$, $f(\beta)=m$　$\alpha,\beta\in[a,b]$ とおくと、この $M\cdot m$ が $f(x)$ の最大と最小になります。

上限の性質より　$\forall\varepsilon>0$　$\exists x\in[a,b]$　$M-\varepsilon<f(x)\leqq M$　です。

$\varepsilon=\dfrac{1}{n}$ とおくと　$M-\dfrac{1}{n}<f(x_n)\leqq M$　となる $x_n\in[a,b]$ がとれます。

$\{x_n\}$ が有界なので、集積値 α を持ち、 α に収束する部分列 $\{y_n\}$ をとると

$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{y_n\to\alpha}f(y_n)=f(\alpha)$　…（６）

また　$y_n=x_{n+k}$ から　$M-\dfrac{1}{n+k}<f(y_n)\leqq M$　$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=M$　…　（７）

（６）（７）より　$f(\alpha)=M$　$\alpha\in[a,b]$ となり最大値の存在が言えました。

下限から　$f(\beta)=m$　$\beta\in[a,b]$　最小値の存在も同様に言えます。

証明はこのような形になりますが、直感的に明らかなことを理詰めで説明することはなかなか困難です。