第14回　Heine－Borelの被覆定理

51

実数の連続性の公理を使った定理をもう少し見ていきます。

> 定理７ Heine－Borelの被覆定理
> 無数の開集合の1組が全体として有界閉集合 F を覆うなら
> その中の有限個だけを用いて、 F を覆うことができる

（証明）平面で考えることにします。まず定理を否定すると

F は有界な集合より、 F を包む 1 つの正方形 Q を考え、それを 4 つの小正方形に分割します。周囲の辺を含む 4 つの小正方形のうち少なくとも一つの F の部分集合は無限個の開集合で覆われることになります。

この部分集合を F_1 、それを含む小正方形を Q_1 とします。同様の操作を繰り返して、閉集合の無限列 $F \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ ができます。$\{F_n\}$ を含む小正方形の列 $\{Q_n\}$ も限りなく小さくなりますから、区間縮小法により $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$ は F に属する 1 点 P_0 を共有します。
この P_0 は F に属しますから、無数の開集合の中の一つ O_1 に含まれることになります。
故に十分大きいある n に対して、 F_n とそれを含む小正方形 Q_n はともに O_1 に含まれます。
これは F_n が 1 つの開集合 O_1 で覆われので無限個の開集合で覆われることに矛盾します。
よって定理は成立します。

この証明方法は背理法なのでなかなか理解しにくいかもしれません。イメージとしては、境界を含む有界な集合を境界のない開集合で包み込む場合、ある一定の面積のある開集合で覆うので有限個で足りるということでしょうか。

この部分の話は、コンパクト集合という用語で説明されますね。集合 F の開被覆が与えられたとき、有限個のものからなる部分被覆を選ぶことができるならば、集合 F をコンパクト集合といい、それは有界閉集合であるとなります。

52

開集合や閉集合についても少し整理してみましょう。数直線上の集合で考えた場合、

> 集合 S が開集合 $\Leftrightarrow$ $\forall a \in S \quad \exists \delta > 0 \quad (a-\delta, a+\delta) \subset S$
> 集合 S が閉集合 $\Leftrightarrow$ 点列 $\{x_n\} \subset S$ のとき $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in S$
> S の集積点はすべて S に入る

という定義があります。
開集合の例として　開区間　(a, b) (a, ∞) や実数全体 $\mathbf{R}$ 、空集合$\varnothing$　など
閉集合の例として　閉区間　$[a, b]$ $[a, \infty)$や孤立点$\{a\}$ 、実数全体 $\mathbf{R}$ 、空集合$\varnothing$　など

また、閉集合の定義として $\mathbf{R}$ を実数全体の集合としたとき、集合 E が開集合でその補集合を $\overline{E}$ とすれば、$\overline{E}$ を閉集合と呼ぶという場合もあります。
だから、$\overline{\mathbf{R}}=\varnothing$　かつ　$\overline{\varnothing}=\mathbf{R}$　より実数全体 $\mathbf{R}$、空集合$\varnothing$　は開集合でもありかつ閉集合にもなります。

もう少し開集合と閉集合について考えていきます。

（A）$\{S_n\}$ を開集合の族とします。$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ は開集合になります。しかし $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ は必ずしも開集合にはなりません。有限個であれば $\bigcap_{n=1}^{N} S_n$ は開集合ですが、無限個では成立しません。

反例として、$S_n=\left(0,1+\frac{1}{n}\right)$ とすると　$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n=(0,1]$ となるからです。次に、

（B）$\{F_n\}$ を閉集合の族とします。$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ は閉集合になります。しかし $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ は必ずしも閉集合にはなりません。有限個であれば $\bigcup_{n=1}^{N} F_n$ は閉集合ですが、無限個では成立しません。

反例として、$F_n=\left[0,2-\frac{1}{n}\right]$ とすると

$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n=[0,1]\cup\left[0,\frac{3}{2}\right]\cup\left[0,\frac{5}{3}\right]\cup\cdots\cdots=[0,2)$ となり閉集合ではありません。

（C）数の集合としてこんな見方もできます。
(1) 整数の集合 $\mathbf{Z}$ は何集合でしょうか。1 点からなる集合 $F_n=\{n\}$ は閉集合です。

$\mathbf{R}-\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} F_n=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n-1,n)$ は開集合より、その補集合 $\mathbf{Z}=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} F_n$　は閉集合です。

(2) 有理数の集合 $\mathbf{Q}$ はどうでしょうか。有理数 $p\in\mathbf{Q}$ に対してどんなに小さな近傍を考えても必ず無理数が入ってしまうので $\mathbf{Q}$ は開集合ではありません。また、$\sqrt{2}$ に収束する有理数の数列を考えることはできますが、その極限値である $\sqrt{2}$ は有理数ではないので $\mathbf{Q}$ は集積点を含みません。よって $\mathbf{Q}$ は閉集合でもありません。
(3) 実数の集合 $\mathbf{R}$ は開集合でありかつ閉集合でした。

53

最後に極限を考えるうえで「はさみうちの原理」についてまとめておきたいと思います。

> はさみうちの原理とは
> 3 つの数列　$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ があり、常に $a_n\leqq c_n\leqq b_n$　のとき
> $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 、$\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$　　（α は$\pm\infty$でもよい）

この結果もよく使われます。アルキメデスの公理から　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$　となりますが、

$0\leqq\frac{1}{n^2}\leqq\frac{1}{n}$　や　$0\leqq\frac{1}{2^n}\leqq\frac{1}{n}$　から　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$　の理論的根拠となります。

次は、コンパクト集合 F 上で連続な実数値関数 $f(x)$ についての内容です。