第13回　Cauchyの収束条件・集積点

47

実数の連続性の公理を使って、いろいろと発展させていきましょう。

最初は自然対数の底 e の定義です。高校では $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ という極限値ですね。

教科書では一定の値に近づくことが予想されるとなっています。これを数学としてしっかり証明しようというわけです。

（証明） $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおき、$\{x_n\}$ が単調増加数列であることを示します。

$$x_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}\qquad(*)$$

同様に　x_{n+1} は

$$x_{n+1}=1+1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!}+\cdots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!}\qquad(**)$$

（＊）と（＊＊）を比較し、$\frac{1}{2!}$ の係数は　$1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}$　…　$\frac{1}{n!}$ の係数も同様なので

$x_n<x_{n+1}$　となり、$\{x_n\}$ は単調増加数列といえます。

次に、$\{x_n\}$ の有界性を示します。（＊）より

$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$　が成立します。

ここで、$\frac{1}{3!}=\frac{1}{2\cdot3}<\frac{1}{2^2}$、$\frac{1}{4!}=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}<\frac{1}{2^3}$、…　$\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$　であることを利用すると

$$x_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3$$

$\{x_n\}$ は上に有界となります。定理 3 より $\lim_{n\to\infty}x_n$ は存在し、それを e となずけます。

e の値を求める場合、実際は $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$　　$(-\infty<x<\infty)$

のTayler展開の公式より　$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$　で求めることになります。

$e=2.71828\,1828\,459045\cdots$　ですね。

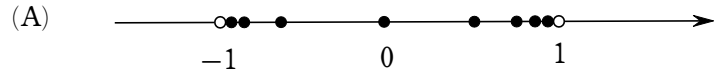
48

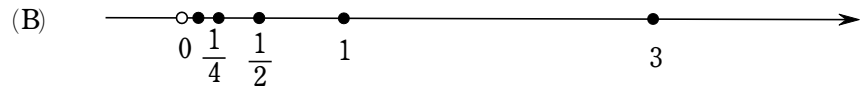
次はコーシーの収束条件の定理ですが、その前に少し寄り道をします。

次の 2 つの数列を調べてみましょう。

(A) $x_n=(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)$　：　$0,\frac{1}{2},-\frac{2}{3},\frac{3}{4},-\frac{4}{5},\cdots$　　$\lim_{n\to\infty}x_n=$振動

(B) $x_n=\begin{cases}n & n\text{が奇数}\\ \frac{1}{n} & n\text{が偶数}\end{cases}$　：　$1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},5,\frac{1}{6},\cdots$　　$\lim_{n\to\infty}x_n=$振動





2つの数列 (A) (B) ともに収束しませんが、(A) では 1 と −1 の近くに点が無限に存在し、
(B) では 0 の近くに点が無限に存在します。このような点を数列 $\{x_n\}$ の集積点（集積値）といいます。

数列の極限値と集積値の違いは a の ε 近傍 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ を考えたとき、

a が極限値 $\Leftrightarrow$ ε 近傍の外側には $\{x_n\}$ は有限個

a が集積値 $\Leftrightarrow$ ε 近傍の外側には $\{x_n\}$ が無限個あるかもしれない

ということになります。実は、有界な数列には重要な定理があります。

> 定理 5（Weierstrassの定理)
> 有界な数列には少なくとも1つの集積値が存在する

（証明）数列 $\{x_n\}$ が有界のとき $\exists K>0$ $\forall n$ について $-K<x_n<K$ 成立します。
閉区間 $[-K, K]$ を2 等分して $[-K, 0], [0, K]$ の 2 つの閉区間の少なくとも一方には x_n が無限個あります。今仮に $[0, K]$ に無限個の x_n が入っていれば $I_1=[0, K]$ とします。

次に I_1 も 2 等分して $\left[0, \frac{K}{2}\right], \left[\frac{K}{2}, K\right]$ の2つの閉区間に分け、無限個の x_n が入っている閉区間を I_2 とします。

以下同様に続けていくと閉区間の減少列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ が得られ、$\lim_{n\to\infty} \frac{K}{2^{n-1}}=0$ より

実数の連続性の中の定理 4（区間縮小法）より $\{I_n\}$ に共通の1点 a が存在します。
この点 a が集積点となります。

49

やっと表題のCauchyの収束条件に来ました。

> 定理 6　Cauchyの収束条件定理
> 数列 $\{x_n\}$ が収束する必要十分条件 $\Leftrightarrow$
> $\forall \varepsilon>0$ $\exists m$ $p>m$, $q>m$ のとき $|x_p-x_q|<\varepsilon$ （＊）

この定理のポイントは、収束する値が分かっていなくても収束することは言えるという点です。

（証明）（ $\Rightarrow$ ）こちらは明らかですが証明は、$x_n \to \lambda$ （収束）とすると

$\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0$ $p>n_0$, $q>n_0$ のとき $|x_p-\lambda|<\frac{\varepsilon}{2}$ 、$|x_q-\lambda|<\frac{\varepsilon}{2}$ であり

$|x_p-x_q| \leqq |x_p-\lambda|+|x_q-\lambda|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ となり成立します。

（ $\Leftarrow$ ）Weierstrassの定理 を使うために、

まず $\{x_n\}$ が有界であることいいます。

$p>m$, $q>m$ のとき $|x_p-x_q|<\varepsilon$ より $q=m+1$ とすると $|x_p-x_{m+1}|<\varepsilon$

x_p（$p>m$）は x_{m+1} の ε 近傍に含まれます。よって $\{x_n\}$ は有界であり集積値 λ が存在します。

$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}$ の中に λ に収束するものが取れるので

$\forall\varepsilon>0$ $\exists m_1>0$ $\varphi(k)>m_1$ $|x_{\varphi(k)}-\lambda|<\varepsilon$ となります。

また定理 6 条件（$*$）より $n,\varphi(k)>m$ $|x_n-x_{\varphi(k)}|<\varepsilon$ となり $M=\max(m,m_1)$ とすると

$\varphi(k)>M$ で $|x_{\varphi(k)}-\lambda|<\varepsilon$ となる $\varphi(k)$ が無限個存在します。

さらに、$n>M$ ならば $|x_n-x_{\varphi(k)}|<\varepsilon$ より $|x_n-\lambda|\leqq|x_n-x_{\varphi(k)}|+|x_{\varphi(k)}-\lambda|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

よって、数列 $\{x_n\}$ は極限値 λ に収束します。

50

なかなか大変な証明でした。ここで言葉の定義をまとめておきます。

数列 $\{x_n\}$ が $\forall\varepsilon>0$ $\exists m$ $p>m$, $q>m$ のとき $|x_p-x_q|<\varepsilon$

という条件を満たすとき基本列（コーシー列）といいます。

定理 6 は次のように簡潔に言えます 数列 $\{x_n\}$ が収束 $\Longleftrightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ が基本列

ここまでの内容は、共立出版の数学ワンポイント双書20「イプシロンーデルタ」田島一郎著を参考にしました。とても分かりやすく書かれています。

また、田島一郎先生は1912年生まれですのでずいぶん昔の方ですが、受験参考書執筆されたり、私が大学受験のとき、深夜のラジオ放送で受験の講座を担当されていました。とても懐かしい思い出です。