第12回　実数の連続性その２

43

実数の連続性の公理と同値な内容をもつ第 3 の定理に移ります。

定理3　　有界な単調数列は収束する

（証明）数列 $\{a_n\}$ が単調増加とします。$\forall n > \forall m$　について　$a_n \geqq a_m$　が成立します。

数列 $\{a_n\}$ が有界より　$\exists M > 0$　$\forall n$　$s.t.$　$a_n < M$　が成り立ちます。

a_n の集合 S は上に有界より、定理 2 から S の上限 c が存在します。この c が数列 $\{a_n\}$ の極限になることを示していきます。

$d < c$　となる d をとるとき、d は c に十分近く、$c - d = \varepsilon$ とおきます。

c が上限である定義より　$d < a_p \leqq c$　となる a_p が存在し、数列 $\{a_n\}$ は単調増加より

$\forall n > p$ のとき　$d < a_n \leqq c$　したがって　$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n$　　$|c - a_n| < |c - d| = \varepsilon$

$\therefore$　$\lim_{n\to\infty} a_n = c$　　数列 $\{a_n\}$ が単調減少のときも同様に示されます。

44

次は実数の連続性の公理と同値な内容をもつ第 4 の定理です。

定理4　閉区間列 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$　があり (1)　$\forall n$　$I_n \subset I_{n-1}$　　(2)　$\lim_{n\to\infty} \lvert b_n - a_n \rvert = 0$　をみたすとき $\exists \alpha$　$s.t.$　$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$　　全区間に共通の1つの数がある これを区間縮小法という

（証明）条件 (1) より　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots \leqq b_n \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1$　だから

数列 $\{a_n\}$ 、$\{b_n\}$ は有界な単調数列であり、定理 3 より $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ が存在します。

$\forall m, n$　について　$a_n < b_m$　より　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \leqq b_m$

また　$\lim_{m\to\infty} b_m = \beta \geqq \alpha$　　$\alpha \leqq \beta \cdots$　①　がいえます。

(2) より　$\forall \varepsilon > 0$　$\exists n_0$　　$\forall n > n_0$　$b_n - a_n < \varepsilon$　が成立するので

①より　$a_n \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b_n$　から　$0 \leqq \beta - \alpha < \varepsilon$ となり　　ε は任意より　$\beta - \alpha = 0$

$\alpha = \beta$　だから　$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$　となって 1 つの数を確定します。

これで実数の連続性についての 4 つの定理が出ました。最後は定理 4 から定理 1 を導くことによってこの 4 つの定理を公理のように利用できます。

45

それでは、定理 4 の区間縮小法から定理 1 の Dedekinnd の定理への証明に入りましょう。

（証明）(A, B) を実数の切断としたとき、下組 A に最大値があるかまたは上組 B に最小値があるかの一方のみであることを言えばいいわけです。

今、 $a \in A, b \in B$ となる 2 数をとり区間 $I_0 = [a, b]$ とします。

$a < \dfrac{a+b}{2} < b$ ですが $\dfrac{a+b}{2}$ が A に属するときは $a_1 = \dfrac{a+b}{2}, b_1 = b$ とし

$\dfrac{a+b}{2}$ が B に属するときは $a_1 = a, b_1 = \dfrac{a+b}{2}$ とします。

区間 $I_1 = [a_1, b_1]$ は $a_1 \in A, b_1 \in B$ で $|b_1 - a_1| = \dfrac{b-a}{2}$ を満たします。

これを同じように繰り返していけば

$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ の区間縮小列ができ $I_n = [a_n, b_n]$ $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ となります。

定理 4 よりこの縮小区間列によって定められる数を s とします。

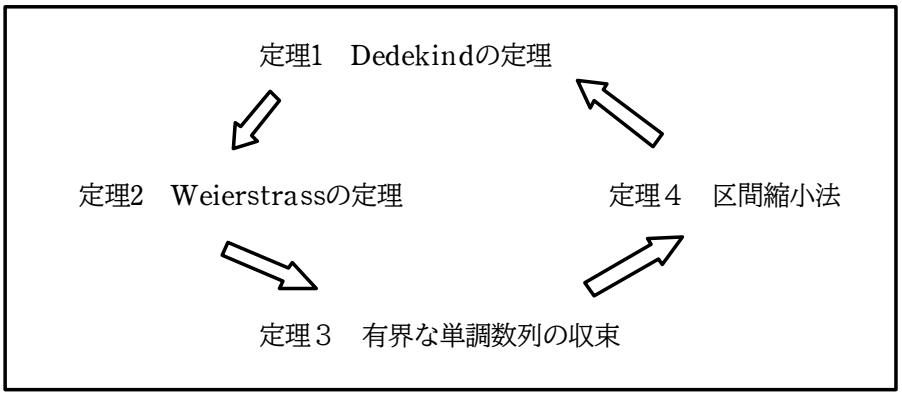
$s \in A$ とすると、 $s < t$ のとき $\lim_{n\to\infty} b_n = s$ より $s < b_n < t$ となる b_n が存在します。

よって $t \in B$ となり、 s は A に属し、 s より大きい数 t はすべて B に属するので s がAの最大数となります。また、B には最小数はありません。

$s \in B$ のときも同様にして、 s が B の最小数となり、A に最大数がないことが言えます。

46

実数の連続性に関する4つの定理



解析学の出発点として、実数の連続性の４つの表現のどれを使ってもよいと考えていきます。

ここまで少し長い道のりでしたが、やっと出発点まで来ました。これからいろいろな定理や公式に進んでいきます。ただ目標としては、複素変数の微分積分学（関数論）まで行くつもりです。