第11回　実数の連続性

40

いよいよ解析学の出発点「実数の連続性」にたどり着きました。Dedekindによる数の切断からスタートします。まずは切断の定義から

> 実数のすべての数を、A , Bの 2 組に分けて、$\forall x\in A$, $\forall y\in B$ のとき必ず $x<y$ とする組み分け (A , B) をDedekindの切断という。

切断 (A , B) において、すべての実数は、下組 A or 上組 B のいずれか一方かつ一方のみに属することを押さえてください。

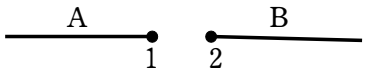
また、任意の数 s をとるとき、$\forall x<s$ について $x\in A$ 、$\forall y>s$ について $y\in B$ ならば s は A or B のどちらかに入ることになります。ここでは s は B に入ることにします。

> 定理1　実数の切断は下組と上組との境界として1つの数を確定する。(Dedekindの定理)

順序のついた数の集合における切断 (A , B) には 3 つの型が可能です。

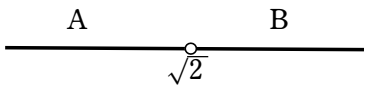
1°　A に最大値、B に最小値が存在する。A と B には飛び (leap) があるという。

例　整数



2°　A には最大値がなく、B には最小値がない。A と B には途切れ (gap) があるという。

例　有理数



3°　A に 最大値があるかまたは B に最小値があり、どちらかだけが成り立つ。

例　実数　　このとき A と B は連続しているという。

結局、整数は1°のタイプのみ、有理数は2°と3°の両方があり、実数は3°タイプのみとなります。切断 (A , B) があるとき、それによって実数 s が決定されることを実数の連続性といいます。
この定理を公理として承認し、理論を組み立てることになります。

41

次は数の集合における上限と下限の話です。

例　数の集合として　$a_n=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$　を考えます。第 1 回のところで

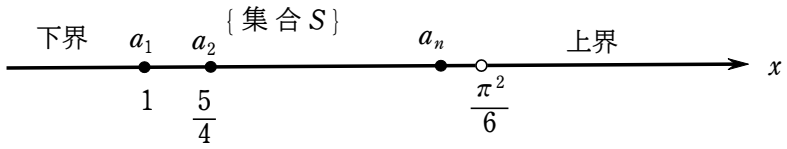
$a_n=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$　$(n\geqq 2)$　という不等式をあげました。

$S=\{a_1 , a_2 , \cdots , a_n , \cdots\}$　は上に有界となります。

$\forall a_n\in S$　について　$a_n<2$　ですから、 2 は S の 1 つの上界といいます。下に有界、下界という言葉は不等号の向きを逆にすれば分かると思います。そして上にも下にも有界のとき単に有界となります。論理記号で表現すると

S が上に有界 $\Leftrightarrow$ $\forall x\in S$　$\exists M$　$s.t.$　$x\leqq M$　　（＊）

大切な点（重要なポイント）は、S が有界のとき、最大値や最小値が存在しなくても、最小の上界、最大の下界は存在することです。



S の最小の上界を上限といい　$supS=\frac{\pi^2}{6}$

S の最大の下界を下限といい　$infS=1$　　と書きます。

2次関数の最大・最小の問題のとき、考えている区間の端が入るか入らないかによって、最大・最小は存在したりしなかったりしますが、上限・下限は必ず存在するところが大切ですね。

> 集合 S の上限 $supS=a$ の定義は次の2つの条件を満たすこと
> (1) $\forall x\in S$　について　$x\leqq a$
> (2) $b<a$　とすれば　$\exists x\in S$　$s.t.\ b<x$

(1) より、上限 a は S に入っていても入っていなくてもよいことになります。

(2) より、$\begin{cases} a\in S & \text{ならば、}x\text{は}a\text{に等しくとることができます} \\ a\notin S & \text{ならば、どんなに}a\text{に近い}b\text{をとっても、もっと}a\text{に近い}x\text{がある} \end{cases}$

ことなります。

42

実数の連続性につながる次の定理があります。

> 定理２　数の集合 S が上に有界ならば、S の上限が存在する。
> 下に有界のとき、下限が存在することも同様。　　（Weierstrassの定理）

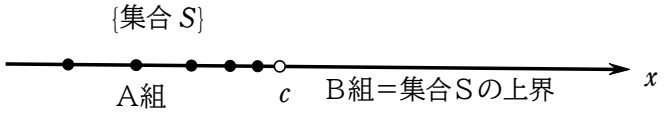
（証明）高木貞治の「解析概論」を参考にします。

S の上界である数の集合を B 組、その他の実数の全部を A 組とします。(A,B) は切断となり、この切断によって確定する数を c とします。

定理１より c は A に属して A の最大数になるか、B に属して B の最小数になります。

今 c が A の最大数と仮定すると、c は S の上界ではなく、c が S の１つの上界であること $(\forall x\in S\ s.t.\ x\leqq c)$ を否定すると、（$\exists x\in S\ s.t.\ x>c$ ）となります。

実数の稠密性より　$\exists b\in A\ \ s.t.\ c<b<x$ であり、これは c が切断 (A,B) の境目であることに矛盾します。よって、c はBの最小数であり、S の上限になります。



この証明は、背理法、∀・∃を含む命題の否定、実数の稠密性などがあり、なかなか難しい内容だと思います。これで実数の連続性の公理と同じものが１つ増えました。