第１０回　立ち止まって整理する

36

次に進む前に、第1回から第9回までの中でいくつかの定理が出てきたので、それを整理しようと思います。

（１）「上に有界な単調増加数列は収束する。」

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$　　$(n\geqq 2)$　より　$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ は単調に

増加しますが 2 を超えないことから　　$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

を導いてきました。

（２）極限値が分かっていなくても数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件があります。

Cauchy の判定法といい、「 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は

　　$\forall\varepsilon>0$　に対して　$\exists n_0$　$p>n_0$　$q>n_0$　のとき　$|a_p-a_q|<\varepsilon$　」

となることでした。この証明には、「区間縮小法」という定理を使います。

だんだん狭まっていく閉区間列 $I_n=[a_n,b_n]$　考え、$\lim_{n\to\infty}|b_n-a_n|=0$　をみたすとき、

$\exists\alpha$　$s.t.$　$\alpha\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$　　全区間に共通の1つの数が確定するというものです。

この定理の良い点は、収束する値が分かっていなくても収束することは言えるというもので、証明では実数の連続性が必要になります。

（３）実数の性質の中の「アルキメデスの公理」

アルキメデスの公理とは、 h がどんなに小さい正の数でも、とても大きい正の数 K に対して

$nh>K$　となる自然数 n が存在するというものです。

これは　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$　を出発点として、数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ より小なる数列 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ や $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ などの数列が

0 に収束すると発展します。

37

数学とは字のごとく数の学問ですね。数はどのように発展していったかを考えると、まず「自然数」があります。そして負の数や 0 が追加されて「整数」になります。さらに割り算を考えることから有理数にまで発展します。

「有理数」というのは、代数学では四則演算のできる最も小さい集合（体という）です。古代ギリシャでは数は四則演算で表現されるものと考えられていましたから、$\sqrt{2}$　のような「無理数」は摩訶不思議だったと思います。

有理数に $\sqrt{2}$　や $\sqrt[3]{2}$　などの代数方程式の解を加えた集合は「代数的な数」といいます。しかし、円周率 π は有理数でもなければ代数的な数でもないので、これを「超越的な数」としました。

結局、有理数は小数で表すと有限小数または循環小数になるので、循環しない小数を無理数と名付けて、2つを合わせて「実数」としました。実数のイメージは数直線上の点と 1対1 対応ですね。

38

日本語で書かれた数学の本の著者は、数学者高木貞治先生の名著「解析概論」（岩波書店）の影響を受けていると思います。その出発点が「実数の公理」です。

ここでは、共立出版の数学ワンポイント双書20「イプシロンーデルタ」田島一郎著を参考にします。

実数の公理

次の 4 つの公理を満たす集合 R を実数体といい、その元（要素）を実数という。

（1） R においては、 0 による除法を除いて加減乗除の四則演算が自由に行える。

（2） R の元は次の大小関係を持つ、

①任意の2元 a, b の間には $\{a > b, a = b, a < b\}$ のどれか1つの関係が成り立つ

② $a > b, b > c$ ならば、 $a > c$ である。

（3）大小関係と演算について

① $a > b$ ならば、 $a + c > b + c$ である

② $a > b, c > 0$ ならば、 $ac > bc$ である

（4）実数の連続性の公理

（4）の実数の連続性の公理については、「デデキントの実数の切断」からスタートすることが多いと思われますが、同値な内容はいくつかあり、デデキントの実数の切断だけではありません。
次の章はここからスタートです。

39

公理の話が出たので、ユークリッド幾何学の公理と公準について考えてみましょう。非ユークリッド幾何学で問題となったのは公準の方です。幾何学以外でも用いられる「公理」に対して、幾何学で使われる公理を「公準」というようです。その 5 つの公準ですが、

公準1：2点間から線分が引ける
公準2：線分を延長して直線にできる
公準3：点と半径から円が描ける
公準4：直角は常に９０°
公準5：直線外の１点を通りこの直線に平行な直線はただ１つある

この５つの公準のうち第５番目を「平行線は２本以上ある」または「平行線は１本もない」と変更しても矛盾なく幾何学ができるというのが非ユークリッド幾何学ですね。

私たちは普通に「平面幾何学」を学びますが、この地球上で厳密な平面はあまりなく、大平原も大海原も曲面なのですね。しかし日常生活の中では「平面幾何学」という１つの約束が十分役に立っていると思います。

同様に私たちは「解析学（微分積分学）」を学びますが、「実数の連続性」という公理から理論が展開されていきます。