第９回　関数列の極限および関数項級数

残った問題はＣとなりましたが、今までの問題より少し条件が複雑です。ただ関数列 $\{f_n'(x)\}$ が一様収束することと、それが十分条件であることは変わりません。

問題Ｃは各関数 $f_n(x)$ が微分可能ならば極限関数 $f(x)$ も微分可能であるかです。

また導関数 $f_n'(x)$ からなる関数列 $\{f_n'(x)\}$ は導関数 $f'(x)$ に収束するか。

そして　　$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}'=f'(x)$ が成り立つか。

結論から書くことにしましょう。これも関数列 $\{f_n'(x)\}$ の一様収束性がなければ成立しません。反例として

例６　閉区間　$I=[0,1]$ において　関数列　$f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$　を考えます。

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 0 & 0<x\leqq 1\end{cases}$　より極限関数は　$f(x)=0$　$(0\leqq x\leqq 1)$　ですが

これは一様収束になります。その理由は

∵）　$0\leqq x\leqq 1$　において　$|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\leqq\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$　となるためには

$n+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$　$n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$　だから　$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]-1$　ととれば

$n>N$　のとき　$n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$　となり　$\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$　で　$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$　が成立し

$\{f_n'(x)\}$　は $I=[0,1]$ において $f(x)$ に一様収束します。

しかし微分可能性を見ると

$0\leqq x\leqq 1$　において　$f_n'(x)=x^n$　より　$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\begin{cases}0 & 0\leqq x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$　ですが

極限関数の導関数は　$f'(x)=0$　$(0\leqq x\leqq 1)$　ですから $x=1$ において　$f'(x)\neq\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

よって問題Ｃは不成立となります。最終的には次の定理にまとめられます。

定理Ｃ

閉区間 $[a,b]$ で定義された、連続微分可能な関数 $f(x)$ の導関数列 $\{f_n'(x)\}$　が一様収束し、

点 $c\in[a,b]$ において、数列 $\{f_n(c)\}$ が収束するとき

関数列 $\{f_n(x)\}$ は閉区間 $[a,b]$ で一様収束し、$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$　も連続微分可能で

$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}'=f'(x)$　をみたす。

なぜ例６が定理Ｃを満たさないかというと、$\{f_n'(x)\}$ が一様収束しないからです。それから

「点 $c\in[a,b]$ において、数列 $f_n(c)$ が収束する」という条件が付くのは、$\{f_n'(x)\}$ から

$\{f_n(x)\}$ の議論に行くとき、積分するので初期条件が必要になります。

詳しくは、数学ワンポイント双書1「一様収束」稲葉三男著、を参照してください。

34

次に関数項級数について考えてみます。

区間 I で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して、

部分和 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ からなる関数列 $\{s_n(x)\}$ が収束するとき、関数項級数

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots$ （＊） は各点収束するといい、

関数列 $\{s_n(x)\}$ の極限関数 $S(x)$ を和とすることは数列の場合と同じです。

また、コーシーの収束条件から（＊）が収束するための必要十分条件が

$\forall \varepsilon>0$ に対し $\exists N>0$ $m>n>N$ $|f_{n+1}(x)+\cdots+f_m(x)|<\varepsilon$

であることも数列の場合と同じです。ただこの収束する場合、 N が区間 I の点 x に無関係にとることができるとき一様収束となります。

35

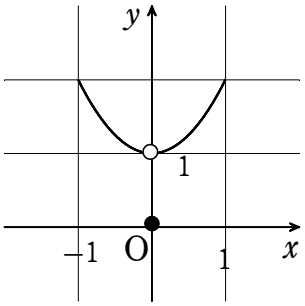
関数項級数の例を考えてみましょう。

例７ 区間 $I=[-1,1]$ のとき、 $f_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ とします。

$x=0$ のとき、 $f_n(x)=0$ ですから $S(0)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)=0$ です。

$x\neq 0$ のとき、 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^2\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$ これは 初項 x^2 、公比 $\dfrac{1}{1+x^2}$ の無限等比級数で

$0<\dfrac{1}{1+x^2}<1$ より収束し和は $S(x)=\dfrac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1+x^2$ となります。



したがって、 $S(x)$ は $x=0$ で連続ではありません。

この例は数Ⅲの教科書でよく見られます。

関数列 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=(1+x^2)\left\{1-\dfrac{1}{(1+x^2)^n}\right\}$

が $x=0$ の付近で一様収束していないからです。

それは $S(x)=1+x^2$ 、 $s_n(x)-S(x)=\dfrac{-1}{(1+x^2)^{n-1}}$ となり

またこれは $\lim_{n\to\infty} \max_{-1\leqq x\leqq 1} |s_n(x)-S(x)|=1\neq 0$ より $\{s_n(x)\}$ は

区間 $I=[-1,1]$ において、 $S(x)$ に一様収束していないと説明されます。

ここまで極限についていろいろと話をしてきましたが、コーシーの収束条件や、上に有界な単調数列が収束することなどは、実数の連続性という公理から導かれるものです。次は、この解析学の原点に戻って話を進めていきます。