第８回　関数列の極限と定積分

29

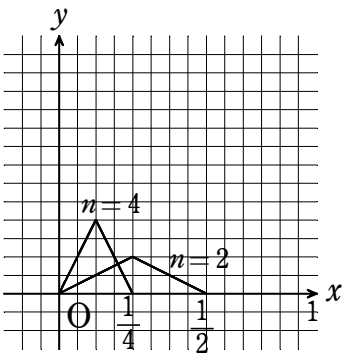
一様収束に関する２番目の問題は関数列の極限をとることと定積分の計算の順序を交換できるかということです。問題Ｂは

関数列 $\{f_n(x)\}$ および関数 $f(x)$ が連続のとき関係式

$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$　が成り立つかでした。

これも答えはＮＯです。反例をあげると

例3　$f_n(x)=\begin{cases}2n^2x & 0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2n}\\ 2n-2n^2x & \dfrac{1}{2n}\leqq x\leqq\dfrac{1}{n}\\ 0 & \dfrac{1}{n}\leqq x\leqq 1\end{cases}$



三角形の面積を考えれば　$\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2}$

また、常に　$f_n(0)=0$　より　$f(0)=0$

$0<x\leqq 1$　のとき　$f(x)=0$　より

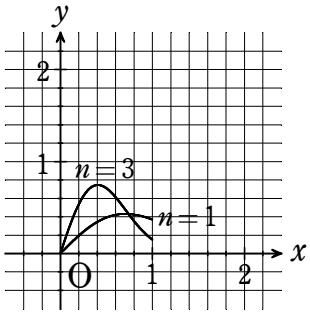
$\int_0^1 f(x)dx=0$　となり　$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2}\neq 0=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$　等号が成立しません。

例4　$f_n(x)=nxe^{-nx^2}$　　$0\leqq x\leqq 1$

$f_n(0)=0$　より　$f(0)=0$

$0<x\leqq 1$　のとき　$f(x)=\lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}=0$

$f(x)$ は恒等的に０より　$\int_0^1 f(x)dx=0$



$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)=\frac{1}{2}$

今度の場合も　$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2}\neq 0=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$　となり等号が成立しません。

30

それではどういう条件があれば　$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

が成り立つか考えてみます。

上の式を変形すると $\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right\}=0$　ですが

$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|\leqq\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx\leqq(b-a)\ \underset{a\leqq x\leqq b}{max}\ |f_n(x)-f(x)|$　より

関数列 $\{f_n(x)\}$ は$[\ a\ ,b\ ]$で一様収束するとき、$\forall\varepsilon>0$ に対して　x にはよらず ε にだけに依存するある $N>0$ が存在し、$n>N$ ならば　$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$　となります。

max　$|f_n(x)-f(x)|$　となっているので、$\forall\varepsilon>0$ に対して ε にだけ依存するある $N>0$ が存在し、$a\leqq x\leqq b$

$n>N$ ならば　$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$　とすることができ、いくらでも小さくできます。

31

ここまでで分かったことは、問題Ｂの関数列 $\{f_n(x)\}$ および関数 $f(x)$ が連続のとき

関係式　$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$　は関数列 $\{f_n(x)\}$ が関数 $f(x)$ に一様収束するとき成り立つということです。

数学史において、コーシーはその著書「微分積分学要論」（訳書は共立出版）で、問題Ｂはいつも成立すると思っていたようですが後に訂正をしています。また、ワイエルシュトラウスも、一様収束ということが問題Ｂの必要十分条件だと思っていたようです。実際は十分条件ですが、数学の天才でも間違えることがあるというのはとても教訓的です。また一様収束という概念が生まれたのは、$\varepsilon-\delta$ 論法という技法があったからだとも言えます。数学の解析学においては $\varepsilon-\delta$ 論法 必要不可欠です。

32

問題Ｂは一様収束より緩い条件「一様有界」で成立する事が示されました。

例5　$f_n(x)=nxe^{-nx}$　　$0\leqq x\leqq 1$　　（例4と e^{-nx} のところが少し異なる）

$f_n(0)=0$　より　$f(0)=0$　　$0<x\leqq 1$ のとき　$f(x)=\lim_{n\to\infty} nxe^{-nx}=0$

$f(x)$ は恒等的に０より　$\int_0^1 f(x)dx=0$

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 nxe^{-nx}\,dx=\left[-xe^{-nx}-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1=\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}\right\}=0$$

よって　$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$　が成立。

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$f_n'(x)$		＋	0	−	
$f_n(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	ne^{-n}

実は　$f_n'(x)=-n^2\left(x-\frac{1}{n}\right)e^{-nx}$　　最大値　$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=e^{-1}$　（n に関係なく一定）

関数列 $\{f_n(x)\}$ は区間〔０,１〕で一様有界となっています。

この結果は「ルベーグの有界収束定理」として知られています。