第７回　ε－δ論法と一様収束

26

次は問題Ｂに移るところですが、少し寄り道をしてε－δ論法と一様収束について丁寧に解説していきましょう。

高校のときも数学において「極限」のところでつまづく人がいたと思います。等式変形中心の数学において、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ を 0 として計算することに戸惑いを感じたかもしれません。事実多くの知識人が疑問を持ったはずです。18世紀の数学界をリードしたオイラーも明確な極限のとらえ方ができていなかったようです。ただオイラーのすごいところは結果として間違えていないことです。

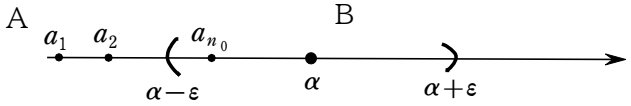
ε－δ論法は19世紀のコーシーからのようですが、詳しくは中根美知代著「ε－δ論法とその形成」（共立出版）を参考にするのがいいと思います。

私がここで紹介したいのは、数列 $\{a_n\}$ があり $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ つまり　a_n が限りなく α に近づくということを1つの架空のゲームのように説明された本です。それは一松信著「解析学序説　上巻」（裳華房）第4章極限の概念の中の説明があります。私にはとても納得のいくものでした。

27

これは１つのたとえ話です。

Ａ、Ｂ2人がいて、Ａは a_n を α に近づけようとし、Ｂはそうはさせまいとする。Ｂは $a_n\longrightarrow\alpha$ を妨げるために1つの限界 $\varepsilon>0$ を設定して $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ となることを妨げようとする。すべての n について $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ ということは期待できないが、目標は十分先の方の a_n の挙動だからある番号 n_0 から先の a_n がすべて $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ となってくれればＡは満足するだろう。



もしそうなったらＢはこれではいかんと、また新たな別の正の数 ε_1 を出して抗戦する。そしたらＡは改めて番号 n_1 を選ぶ。すべての $n\geqq n_1$ について $|a_n-\alpha|<\varepsilon_1$ となっている。Ｂがどんなに苦心して ε を出してきても、いつもＡがうまく n_0 を決めるとＡの勝ちとなるならば、それこそ正しく a_n が α に限りなく近づくということである。

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$　を説明すると、Ａは０に近づけようとするとき、Ｂは $\frac{1}{1000}=0.001$　という1つの限界を示す。$n=1,2,3$ のとき　$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ は $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ と　Ｂの設定した限界

$|a_n|<\frac{1}{1000}$　はクリアーできないけれど、$n_0=11$ から先は $a_{11}=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}<\frac{1}{1000}$

となりＡが勝つ、Ｂがさらに $\frac{1}{10^6}$ という限界を出したとしても、Ａが $n_1=21$ を選ぶと

$a_{21}=\frac{1}{2^{20}}=\frac{1}{1024^2}<\frac{1}{10^6}$ となりまたＡが勝利する。

ここでは、実数の性質の中の「アルキメデスの公理」が関係します。

アルキメデスの公理とは、 h が正の定数ならば、任意の正の数 K に対して
$nh>K$ となる自然数 n が存在するというものです。

今の場合は、逆数を考えることによって、どんなに小さな正の数 $\frac{1}{K}$ に対しても

$\frac{1}{nh}<\frac{1}{K}$ となる自然数 n が存在するとなります。

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{n}$　　$n\geqq 3$　から　a_n は限りなく 0 に近づくことになります。

これを記号では　　$\forall\varepsilon>0$ に対し　$\exists n_0$　　$\forall n\geqq n_0$ について　$|a_n-\alpha|<\varepsilon$
が成立するとき数列 $\{a_n\}$ は α に収束すると表現します。

28

次は一様収束についてです。

関数列 $\{f_n(x)\}$ が〔 a , b 〕で関数 $f(x)$ に一様収束するとは、 $\forall\varepsilon>0$ に対して　x にはよらず ε にだけに依存するある $N>0$ が存在し、$n>N$ ならば　$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$　となることです。

max　$|f_n(x)-f(x)|$　を考えているので、$\forall\varepsilon>0$ に対して ε にだけ依存するある $N>0$ が存在し、$a\leqq x\leqq b$

$n>N$ ならば　$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$　となり、$\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|=0$　です。

図形的にみると
正の整数 N をうまくとると、$n>N$ となる
$f_n(x)$ のグラフが極限関数 $f(x)$ のグラフの
ε 帯状　$\{(x,y)\mid a\leqq x\leqq b,\ f(x)-\varepsilon<y<f(x)+\varepsilon\}$
に含まれることになります。
$\lim_{n\to\infty}\ max_{a\leqq x\leqq b}|f_n(x)-f(x)|=0$　　のとき

関数列 $\{f_n(x)\}$ は〔 a , b 〕で一様収束するといいます。

