第６回　関数列の極限と連続性

21

数学の中で解析学というのは関数について学ぶものであり、その中で特に連続性や微分可能性･積分可能性などに着目していると思います。また数列の極限のようにある値に近づくとか、無限大に発散するなども考えていますね。

これからは関数列 $\{f_n(x)\}$ について考えていきましょう。ここで参考にした書籍は、共立出版の数学ワンポイント双書１「一様収束」稲葉三男著です。このシリーズは高校から大学にかけての数学の中で学生が理解に苦しむ、また数学全体の理解に役立つ部分を取り上げています。その１番目が「一様収束」ですから、いかに重要かが分かります。

条件は　　閉区間 $[a,b]$ で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ があり、関数 $f(x)$ に収束するとします。

問題Ａは　各関数 $f_n(x)$ が連続ならば極限関数 $f(x)$ も連続であるか。

問題Ｂは　関数列 $\{f_n(x)\}$ および関数 $f(x)$ が連続のとき関係式

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$　が成り立つか。

問題Ｃは　各関数 $f_n(x)$ が微分可能ならば極限関数 $f(x)$ も微分可能であるか。

導関数 $f_n'(x)$ からなる関数列 $\{f_n'(x)\}$ ば導関数 $f'(x)$ 収束するか。

そして　　$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}'=f'(x)$　が成り立つか。

具体例で考えていきましょう。

22

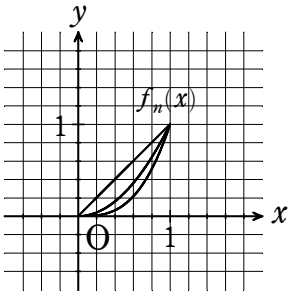
問題Ａ　各関数 $f_n(x)$ が連続でも極限関数 $f(x)$ が連続とならない例

例1　$f_n(x)=x^n$　区間 $I=[0,1]$　とてもシンプルな例です。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=\begin{cases}0 & 0\leqq x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

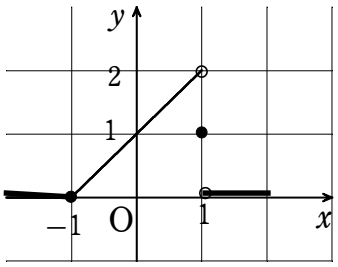
$f_n(x)$ が連続ですが

$f(x)$ は $x=1$ で不連続となります。



例2　$f_n(x)=\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$　区間 $I=[-2,2]$　数学Ⅲの関数の極限にある問題です。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1+x}{x^{2n}}}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}=\begin{cases}1+x & |x|<1\\ 1 & x=1\\ 0 & x=-1\\ 0 & 1<|x|\leqq 2\end{cases}$$



今度の場合も $f_n(x)$ が連続ですが $f(x)$ は $x=1$ で不連続になります。ポイントはなぜ不連続となるかです。

23

連続性を保つためには　$\lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty} f_n(x+h)=\lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0} f_n(x+h)$　が成立することが必要十分条件。

つまり 2 つの極限 $\lim_{h\to 0}$ と $\lim_{n\to\infty}$ の順序を変えてもよいかという 2 重極限の問題になりますね。

例 2 において $x=1$ において不連続ですが、$\lim_{n\to\infty} f_n(1+h)$ を $h>0$ と $h<0$ に分けて考えます。

$h>0$ のとき　$\lim_{n\to\infty} f_n(1+h)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2+h}{1+(1+h)^{2n}}=\dfrac{2+h}{\infty}=0$

$h<0$ のとき　$\lim_{n\to\infty} f_n(1+h)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2+h}{1+(1+h)^{2n}}=\dfrac{2+h}{1}=2+h$

左右の極限が一致しないので　$\lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty} f_n(1+h)$　は存在しません。

また$\lim_{h\to 0} f_n(1+h)=1$　より　$\lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0} f_n(1+h)=1$　となります。

24

ここで議論を正確にするために、$\varepsilon-\delta$論法と一様収束について触れておきたいと思います。

まず$\varepsilon-\delta$論法とは、関数 $f(x)$ について $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ という極限を

任意の正の数 ε に対してある正の数 δ が存在して　$0<|x-a|<\delta$　ならば　$|f(x)-\alpha|<\varepsilon$　が成立

もっと記号的に　$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\quad 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\alpha|<\varepsilon$　と書きます。

この記法の特徴は、論理の’任意’や’ある’の言葉を用い不等式で表現することですね。

次に「一様収束」とは、閉区間 $[a,b]$ で定義されている関数列 $\{f_n(x)\}$ があります。$\forall x\in[a,b]$ において関数列 $\{f_n(x)\}$ が収束するとき、$\forall\varepsilon>0$に対して ε にだけ依存して x には無関係な $N>0$ が存在し、$n>N$ のとき $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ となるとき、関数列 $\{f_n(x)\}$ は閉区間 $[a,b]$ で「一様収束」するといいます。

$\varepsilon-\delta$論法と一様収束については後でもう少し丁寧に説明しますので、このまま話を続けます。

25

例1と例2において、関数列 $\{f_n(x)\}$ は $x=1$ において連続性が極限関数に維持されません。

$x=1$ の近くでは $f_n(x)$ の値と $f_n(1)$ の値の差を小さくできません。

問題Aは次の定理Aに変わります。

> 定理A
> 区間 I で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ が I において $f(x)$ に一様収束するとき、
> $f_n(x)$ が連続ならば $f(x)$ も連続である。

（証明）関数列$\{f_n(x)\}$がIで$f(x)$に一様収束するので、任意の$\varepsilon>0$を考え

区間Iにある任意のx，$x+h$について

$|f_N(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$　、　$|f_N(x+h)-f(x+h)|<\frac{\varepsilon}{3}$　①　となる十分大きなNが存在する。

また、$f_N(x)$は連続より　十分小さな$\delta>0$をとると

$|h|<\delta$のとき　$|f_N(x+h)-f_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$　②　とできる。よって①②より

$$|f(x+h)-f(x)|\leqq|f(x+h)-f_N(x+h)|+|f_N(x+h)-f_N(x)|+|f_N(x)-f(x)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

これは$\lim_{h\to0}|f(x+h)-f(x)|=0$　ということであり、$f(x)$は点xで連続。

xは区間Ｉの任意の点より　$f(x)$は区間Iにおいて連続である。