第2回　ベルヌーイ一族

（ヤコブ、ヨハン、ダニエル･ベルヌーイ）

〔1〕 ヤコブ･ベルヌーイ（Jacob Bernoulli, 1654－1705）数えで52歳　スイス　について

父親は兄ヤコブに神学を学ばせようとしたが、本人は数学と天文学に興味があった。

1677年(24)パリに行き、デカルトの後継者と交わり、数学と天文学を学ぶ。

1681年(28)彗星の出現について、神学上の解釈と対立し、数学に専心することになった。

1683年(30)スイスのバーゼル大学で、力学の講義を始めた。

1687年(34)バーゼル大学の力学の教授となる。微分積分法に強い関心を持ち、この計算法の可能性と、この方法が適用される問題を追及していくことになった。

1690年(37)対数螺旋に興味を持ち、極座標を使って、曲線の長さや曲率を求める。

ベルヌーイ型の微分方程式　$y' + p(x)y = Q(x)y^n$　の研究をした。

1703年(50)『推測術』を出版。確率論に関する最初の本格的な本であったが、この中でベルヌーイ数や大数の法則が載せられている。

1705年(52)死亡

無限級数にも関心を持っていた。

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$$

が収束することはわかっていたが、正確な値を求められなかった。これは「バーゼルの問題」として、当時の数学者の注目を集めた。1736年オイラーにより解かれた。

〔2〕 ヨハン･ベルヌーイ（Johan Bernoulli　1667－1748）数えで82歳　スイス　について

彼は兄のヤコブとともに、ライプニッツの微積分法の発展に寄与した。他にも、重力場における粒子の運動に関する問題など、応用数学の様々な分野で多くの貢献をした。

1690年(24)カテナリー曲線の方程式を発見

1691年(25)指数関数の微積分法を確立。

弟のヨハンはバーゼル大学で数学の教授職にあった兄ヤコブより数学を学んだが、いつも衝突が絶えなかった。

1705年(39)バーゼル大学で、ギリシャ語の教授職に就き、ヤコブの死後、数学職を得た。

レオンハルト･オイラーはヨハンの弟子である。

1748年(82)死亡

1697年(31)に　$\int_0^1 x^x dx = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots$

という不思議な式を求めている。

〔3〕 ダニエル･ベルヌーイ(Daniel Bernoulli 1700－1782)数えで83歳　スイス　について

父のヨハン･ベルヌーイがオランダのフローニンゲン大学に在任中、同地で生まれた。3人兄弟の2番目で、兄･弟も数学者･物理学者になった。伯父のヤコブの死去の後、父ヨハンが後任となり、家族でバーゼルに帰った。

ダニエルはベルヌーイ家の中ではもっとも才能があり有望であった。そのためダニエルは父のヨハンとの関係には緊張が絶えなかった。父親はダニエルを実業家にしようとしたが、本人は数学･物理学に強い関心を持ち、13歳でバーゼル大学に入学。15歳で学士試験に受かり、16歳で修士号を取得した。

1725年(26)兄とともにロシア･サンクトペテルブルク科学アカデミーの数学のポストの付く。

1727年(28)父ヨハンの弟子であった、オイラーが同科学アカデミーへ移り、1733年まで協力して生産的な研究を行った。

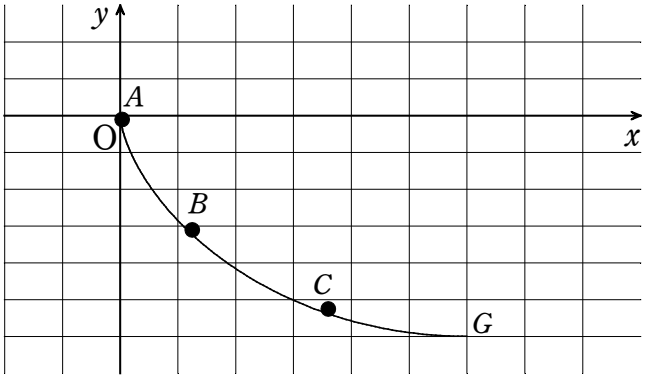
ダニエルはバーゼル大学で植物学、生理学を教えていたが、1750年(51)から念願の物理学のポストを得て、1766年まで物理学を教えた。この間の研究対象は天文学や海洋学に広がり、パリ･アカデミー大賞の受賞を10回もした。

ダニエルの力学への貢献の特徴は、ニュートン理論とライプニッツの強力な微積分法を組み合わせて、運動方程式のエネルギー保存則を活用したことにある。特に、海洋･船舶への応用を含めた流体力学に大きく貢献した。

〔4〕 ベルヌーイ兄弟は、力学的に特別な性質を持つ3つの曲線を決定することに関わりました。そしてここから微分方程式や変分学が生まれてくることになりました。

①等時曲線

サイクロイドに沿って落下する質点は、どこから落としても最低点に達する時間は等しいという性質があります。サイクロイドはガリレイによって発見され、熱心に研究されました。この性質は1659年にはじめてホイヘンスにより見いだされ、幾何学的に証明され、振り子時計の製作に使われました。



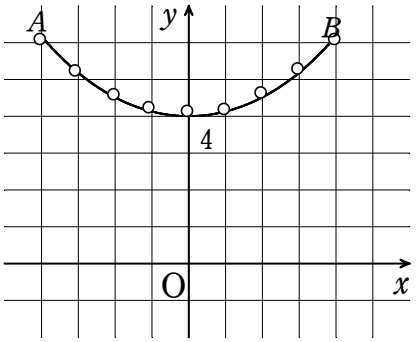
上の図において、3つの異なる点 A , B , C から同時にボールを転がした場合、坂道がサイクロイドならば、最低点の G につくタイミングは同じになるということです。

このことはネットでも等時曲線のシミュレーションで見ることができます。

②懸垂線

密度一様の伸縮性のない糸を2点A，Bに固定して吊るすとき、どのような形の曲線になるかという問題。兄のヤコブはガリレオ同様、懸垂線は放物線であると考えていたが、弟のヨハンはそれは指数関数を使って表現されることを一晩で解いてしまった。現在では $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ で表される。

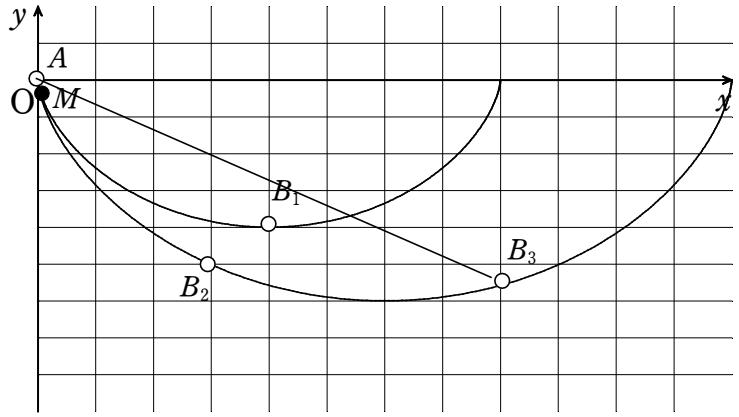
$a=4$ の場合



ネックレスも
この曲線になる

③最速降下曲線

2点A，Bは同じ垂直平面上にあるとします。粒子Mが、坂道に沿ってAからBへと落下するとき、落下時間が最小となる坂道は何かという問題です。弟のヨハンが誌上で、ヨーロッパの数学者に向けて提起した問題とされています。求める曲線はサイクロイドですが、正解をライプニッツ、ヤコブ、そしてニュートンも求めています。



サイクロイド曲線は $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=-a(1-\cos\theta) \end{cases}$ で表されています。 a の値によって曲線は変化しますが、点 B_1 を通る場合と点 B_2, B_3 を通る場合のサイクロイド曲線は異なります。ここで興味深いのは、点 A から下にある点 B に落ちてくる場合、 B_3 の場合は一番下まで下がってから少し上に上がることです。距離としては直線 AB_3 の方が短いはずですが、時間ではサイクロイドなのですね。

〔5〕 ヨハンが求めた不思議な積分の値

$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots$　　について考察します。

$x^x = e^{x\log x} = \frac{1}{0!} + \frac{x\log x}{1!} + \frac{(x\log x)^2}{2!} + \frac{(x\log x)^3}{3!} + \cdots\cdots$　　すべての実数 x で収束

このようにテイラー展開ができます。

ここで、 $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\log x)^n dx$　　とおくと、

$$I_{m,n} = \left[\frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1}\right]_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m (\log x)^{n-1} dx$$

$$= 0 - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1} = \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} = \cdots\cdots = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n}\cdot I_{m,0}$$

$I_{m,0} = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ より　　$I_{m,n} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$　となります。

よって、$\frac{1}{n!} I_{n,n} = (-1)^n \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$　となり

$$\int_0^1 x^x dx = \frac{1}{0!} I_{0,0} + \frac{1}{1!} I_{1,1} + \frac{1}{2!} I_{2,2} + \cdots\cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots\cdots$$　　が成り立ちます。

$$\fallingdotseq 0.783174511$$

この級数は、ライプニッツの定理より、各項の絶対値が 0 に収束しかつ交代級数なので収束します。

ライプニッツの微積分が現れてからわずか10年後にこのような計算がなされました。数学的な好奇心からこの積分の値を求めたことに、この時代の数学の流れがいかに速かったかを感じさせます。

参考資料

・志賀浩二『数学の流れ30講　中　－17世紀から19世紀まで－』(朝倉書店2008年)
・安倍齊『微積分の歩んだ道』（森北出版1989年）
・W.ダンハム『数学の知性』（現代数学社1998年）
・高木貞治『解析概論』（岩波書店1972年）