第４回　リーマンのゼータ関数とルーシェの定理

13

無限級数の話題の中で素数とも関係のある1つの話題に触れてみます。それはリーマンのゼータ関数です。

$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$　　$(s>1)$　というものです。

オイラーは s が２以上の偶数について結果を示しました。

ここで無限等比級数を考えます。これらは絶対収束します。

$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$　　$\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$　　絶対収束するので

$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\cdots$　などが成り立ちます。

ここですべての素数の逆数について考えると

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdots}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$

が成立するので、リーマンのゼータ関数は

$$\zeta(s)=\prod_{p\text{は素数}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

という形になります。とても不思議な結果ですね。

14

無限級数と絶対収束についてまとめてみましょう。

「$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束する（$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束する）とき、必ず収束する。」が言えます。

絶対収束する無限級数はおおむね有限和と同様の性質を持つ。高木貞治著の「解析概論」には、この「おおむね」という言葉が使われていますが、反例が載ってないのが残念です。積についても絶対収束するので、項の順序は任意に変更できます。また、交換法則、結合法則、分配法則も成立します。

複素数を変数とする関数論においても適用されるのでとっても便利な条件だと思いますね。

15

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束は $\{S_n\}$ の収束と同じなので、Cauchy の判定法があり

$\forall \varepsilon > 0$ に対し　$\exists n_0 > 0$　$\forall m > \forall n > n_0$ のとき

$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$ ならば　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束となるものです。

この判定法の優れている点は、収束するゴールが見えていなくても収束は保証できる点です。

この定理と同じニュアンスのものとして、代数学の基本定理があります。

n 次方程式は複素数の範囲で重複を含めれば必ず n 個の解をもつというものです。これは解が n 個あるけれど、それは具体的には何かと聞かれたとき解の公式が必要になります。しかし、ガロア理論では、5次以上の代数方程式には加減乗除と累乗根のみを使った解の公式が存在しないことが示されました。だから解の正確な場所は分かりません。ただこれも、関数論の「ルーシェの定理」を使うと、複素数解の絶対値がどこの範囲で存在するかが分かっています。

16

ルーシェの定理とは　「単純閉曲線 C で囲まれた領域 D のとき、関数 $f(z), g(z)$ は閉領域 $\overline{D} = D \cup C$ で正則（微分可能と考えてください）で、C 上で常に $|f(z)| > |g(z)|$ ならば $f(z) + g(z) = 0$ と $f(z) = 0$ の D 内における解の個数は一致する」　というものです。

例　$z^5 + 15z + 1 = 0$ の 5 つの解の存在範囲を考えてみましょう。

$f(z) = z^5$ 、 $g(z) = 15z + 1$ とおく。ともに $|z| \leqq 2$ で正則で

$|z| = 2$ 上では　$|f(z)| = 32$ 、 $|g(z)| \leqq 15|z| + 1 = 31$ より　ルーシェの定理から

$f(z) + g(z) = 0$ と $f(z) = 0$ は $|z| < 2$ において同数（5個）の解をもつ。

$|z| = \frac{3}{2}$ 上では　$|f(z)| = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 7.59\cdots$　$|g(z)| \geqq 15 \times \frac{3}{2} - 1 = 21.5$ より　$|f(z)| < |g(z)|$

$g(z) = 15z + 1 = 0$ は　$|z| < \frac{3}{2}$ では　$z = -\frac{1}{15}$ という解しか持たないので、

$f(z) + g(z) = z^5 + 15z + 1 = 0$ は　$\frac{3}{2} < |z| < 2$ において残りの4個の解をもつことが分かります。

$\{f(z) + g(z)\}' = 5z^4 + 15$ より　z が実数のとき正なので、$f(z) + g(z)$ 単調増加で 実数解は 1 つだけです。残りの 2 組の共役な虚数解は $\frac{3}{2} < |z| < 2$ に存在することになりますね。

次は関数列に対する一様収束の説明に入るところですが、ちょっと寄り道して円周率 π の無限級数による計算にチャレンジしようと思います。