第５回　円周率の計算と無限級数

17

円周率は数学の中でも最も有名で不思議な定数だと思います。もちろん無理数ですから分数では表現できませんし、小数にしても無限に続く不規則な数の羅列です。

昔、ギリシャのアルキメデスは　$\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$　となることを知っていました。ちなみに

$\left(\frac{223}{71}=3.140845\cdots\ ,\ \frac{22}{7}=3.1428591\cdots\right)$ です。

連分数表示という方法で近似したときに　$\frac{333}{106}<\pi<\frac{355}{113}$　というのもあります。

$\left(\frac{333}{106}=3.141509\cdots\ ,\ \frac{355}{113}=3.1415929\cdots\right)$　となりかなり正確です。

しかし、100桁まで正確に求める方法としては、πを無限級数で表現して計算する方法が現実的だと思います。

18

よく知られたπの無限級数表現として

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots \qquad ①$$

というのがあります。

これは形としてはとても美しいのですが、右辺の収束は極めて遅くて実用的ではありません。

①が導かれた方法として1つの無限級数

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

（$|x|<1$　で収束）があります。両辺を積分して

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \qquad (|x|<1\ \text{で収束}) \quad ②$$

が成り立ちます。

$y=\tan x\ \left(0\leqq x<\frac{\pi}{4}\right)$ の逆関数を　$y=\mathrm{Arctan}\,x$　$(0\leqq x<1)$　とすると②は

$$\mathrm{Arctan}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \qquad (|x|<1\ \text{で収束}) \quad ③$$

となります。

$x=1$ のとき右辺は交代級数で、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ より条件収束し ① が成立します。

19

いよいよ π を無限級数で計算する現実的な手法「マチンの公式」です

$\tan\alpha=\frac{1}{5}$　のとき　$\alpha\fallingdotseq 11°19'$　$4\alpha\fallingdotseq 45°16'$　となり 4α は $\frac{\pi}{4}$ に近い値です。

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{5}{12}$　　$\tan 4\alpha=\frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}=\frac{120}{119}=1+\frac{1}{119}\fallingdotseq 1.0084$　です。

$\tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 4\alpha-1}{1+\tan 4\alpha}=\frac{1}{239}$　　③を使うと　$\mathrm{Arctan}\frac{1}{239}=4\alpha-\frac{\pi}{4}$　となり

$$\frac{\pi}{4}=4\mathrm{Arctan}\frac{1}{5}-\mathrm{Arctan}\frac{1}{239} \quad \cdots \quad ④$$

「マチンの公式」が作れます。

ちなみに　John Machin は英国の人（1680−1751）で、テイラー展開で有名なテイラーと同時代の人です。

④を無限級数で表現すると

$$\pi=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}-\cdots\right)-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot239^3}+\frac{1}{5\cdot239^5}-\cdots\right)\quad\cdots\quad⑤\quad\text{となります。}$$

小数第10位までを計算すると

$$\pi=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}-\frac{1}{7\cdot5^7}+\frac{1}{9\cdot5^9}-\frac{1}{11\cdot5^{11}}\right)-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot239^3}\right)$$
$$=3.1415926512\cdots$$

となり小数点以下第８位まで正確に求まります。

20

それでは円周率　π　の値を小数点以下第100位まで計算するためにはどれくらいまで級数を計算しなければならないのでしょう。⑤ における２つの級数別に考えます。

$\dfrac{16}{(2n+1)5^{2n+1}}<10^{-100}$　を変形し　$A=(2n+1)\log_{10}5+\log_{10}(2n+1)-4\log_{10}2>100$

$\dfrac{4}{(2m+1)239^{2m+1}}<10^{-100}$　を変形し　$B=(2m+1)\log_{10}239+\log_{10}(2m+1)-2\log_{10}2>100$

ここで準備ができたので n , m に具体的な数値を入れて表を作ります。

n	70	71
A	99.5	100.9

m	20	21
B	98.5	103.3

もちろん手計算では大変ですので、コンピューターを使ってプログラムを作って求めることになると思います。私も学生のとき「ＦＯＲＴＲＡＮ」という言語で求めました。もう何十年も前のことです。

$$\pi=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}-\cdots-\frac{1}{143\cdot5^{143}}\right)-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot239^3}+\frac{1}{5\cdot239^5}-\cdots-\frac{1}{43\cdot239^{43}}\right)$$

$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510$
$58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679$

次は関数列に対する一様収束の説明に入ります。