第３回　絶対収束と条件収束

8

無限個の和や積の計算において、交換法則や結合法則や分配法則はどういう条件ならば成立するのかを考えてみます。その十分条件の1つが絶対収束です。

少しずつ確認をしましょう。数列 $\{a_n\}$ が一定の数 α に収束するとは

$\forall \varepsilon>0$ に対して　$\exists n_0$　$\forall n>n_0$ について　$|a_n-\alpha|<\varepsilon$　となることでした。

上の定義は収束する極限値が分かっているときに使えますが、極限値が分かっていなくても数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件があります。Cauchy の判定法といいます。

数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は

$\forall \varepsilon>0$ に対して　$\exists n_0$　$p>n_0$　$q>n_0$　のとき　$|a_p-a_q|<\varepsilon$　となること

この定理のポイントは、収束する値が分かっていなくても収束することは言えるというものです。この定理の証明では、後で述べる実数の連続性が必要になります。

次はとても重要な性質、絶対収束についてです。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとは　$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束することが定義です。今次のことが成立します。

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば、必ず収束する。

（証明）　$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_n$ とおく。

$\forall \varepsilon>0$ に対して　$\exists n_0$　$m>n>n_0$　のとき　$|S_m-S_n|<\varepsilon$　ならば　$\{S_n\}$ は収束ですが

$|S_m-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|<|a_{n+1}|+\cdots+|a_m|$　より　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するときは

$|a_{n+1}|+\cdots+|a_m|<\varepsilon$　となるから　$|S_m-S_n|<\varepsilon$　が成立します。よって　$\{S_n\}$ が収束し、

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束します。

9

絶対収束の無限級数は有限和と同様の性質を持つことが大事なポイントになります。

例えば、絶対収束する無限級数　$A=\sum_{n=1}^{\infty} a_n, B=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$　のとき

$AB=a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+z_2b_2+a_3b_1+\cdots$　において右辺の級数は絶対収束します。

また、数列、級数の収束は複素数にも適用され

$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束すれば、　$\forall \varepsilon>0$ に対し　$\exists N$　$m>n>N$　のとき

$|z_{n+1}+\cdots+z_m|\leqq|z_{n+1}|+\cdots+|z_m|<\varepsilon$　より　$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するとなります。

10

無限級数を考える場合、絶対収束は収束するための十分条件です。必要十分条件ではないけれど、非常に有効であることを押さえておいて下さい。

もう一つ押さえておきたいことは、

「上に有界な単調数列は収束する」という定理です。

正項級数の場合、例えば、2つの級数があって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ とする。

$\forall n$ に対し $0<a_n \leqq b_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ 収束のとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は有界なので収束します。

11

絶対収束ではないが収束する条件収束の例を見ていきましょう。

一般には難しいようですが、交代級数の場合が知られています。交代級数とは交互に正または負になる級数のことです。つまり

$\forall n$ について $a_n>0$ かつ $a_n>a_{n+1}$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ のとき

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1-a_2+a_3-\cdots$ は収束する。

証明は難しくないので触れておましょう。

$S_{2m}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2m-1}-a_{2m})$ すべての項が正

$S_{2m+1}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2m}-a_{2m+1})$ と考えると

$S_2<S_4<\cdots<S_{2m}\cdots\cdots S_{2m+1}<\cdots<S_3<S_1$ であり $\lim_{n\to\infty}(S_{2m+1}-S_{2m})=\lim_{n\to\infty} a_{2m+1}=0$

$\forall \varepsilon>0$ に対して $\exists 2m+1$ $p>2m+1$ $q>2m+1$ のとき

$|S_p-S_q|<|S_{2m+1}-S_{2m}|<\varepsilon$ となり、 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は収束する。

12

交代級数が条件収束する例

（1） $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$ は $0\leqq x<1$ において収束する。

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^1(1-x^2+x^4-x^6+\cdots)dx$ より $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$ が成立する。

これ以外にも

（2） $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\int_0^1(1-x+x^2-x^3+\cdots dx)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\log 2$ が知られている。

これらの級数はとても収束が遅いので計算には不向きです。ただ形として美しいのでよく取り上げられます。