第1回　オイラーの無限解析

1

皆さんはオイラーという数学者を知っていますか？

スイスで生まれ、18世紀（1707－1783）に活躍しました。

あの有名なニュートンは17世紀後半（1642－1727）に活躍した人であり、同じ英国人でテイラー展開で有名なテイラー（1685－1731）は先輩です。

オイラーは当時バーゼルの問題を解いたことで世界的な名声を博しました。それは

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=?$$　　この正確な値は何か？という問題。

オイラーはこの無限級数の値を求めることに成功したのです。

この講座はここからスタートしようと思います。

2

少し復習から入ってみましょう

$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$　は知っていますね。

$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$　なども数列のところで習いました。

これらの無限級数は＋∞に発散してしまうのですが、一般の $1^k+2^k+\cdots\cdots+n^k$ の公式も頑張って計算すれば見つけることができます。

さて、$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ はどうでしょう。

数学Ⅲを学習した人なら、次の不等式を見た記憶があるかもしれません。$y=\frac{1}{x}$ のグラフと x 軸で挟まれた面積を $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ となる階段状の面積と比較することで分かります。

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n \qquad (n\geqq 2)$$

この式からわかることは、$n\to\infty$ のとき $\log(n+1)\to\infty$ より

$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ は∞に発散します。$1+\log n$ より小さいのでとてもゆっくり発散します。

ちなみに、整式とは異なり、$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$ を n の式では表せません。

いよいよ、$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$　の番です。

ここで2つのことに注意します。1つは、次のような数学的帰納法の問題がありました。

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \qquad (n\geqq 2)$$

つまり、$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ は単調に増加しますが2を超えないことが分かります。

もう1つは、「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理を使います。この話は後程出ますので今は認めてください。よって、$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ は有限な値に収束するがそれは正確に求められるかということです。これがバーゼルの問題でした。

オイラーの考えのポイントは、$\sin x$ のテイラー展開と因数定理です。先ほどテイラーはオイラーよりも先輩といいましたが、当時いろいろな関数をべき級数で表現するという事が盛んにおこなわれていました。

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$　を少し変形して

$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$　　①　とおく

$x \to 0$ のとき　$\frac{\sin x}{x} \to 1$ より　この関数は $x=0$ のとき 1 と決めることができます。

次に、n次の整式 $P(x)$ で、$P(0)=1$ をみたし、かつ $P(x)=0$ の解が $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n$ ならば

$P(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$　　と表されることに注意します。

例えば、　$24 \times P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ とすれば

$P(x) = \frac{1}{24}(1-x)(2-x)(3-x)(4-x) = (1-x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{x}{4}\right)$　と変形できます。

ここで　$P(x) = \frac{\sin x}{x}$　と考えると $P(0)=1$ であり、

$x \neq 0$ で $P(x)=0$ の解は　$\pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 3\pi,\ -3\pi,\ \cdots$　より因数定理を適用すると、

$P(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots$

$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$　　と無限個の積になります。x の昇べきに展開すると

$P(x) = 1 - \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)x^2 + \cdots$　　②　とおく

ここで①と②のx^2 の係数を比較すれば

$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$　　が成り立つので、これから

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots\cdots = \frac{\pi^2}{6}$

これがバーゼルの問題の解でありました。

因数定理を無限個の解に適用していいのか、また無限個の展開式を単純に係数比較できるかなど、すぐには納得できない人は当時もいたようです。